$0 \leqq \theta \leqq \pi$ は $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ を満たす。

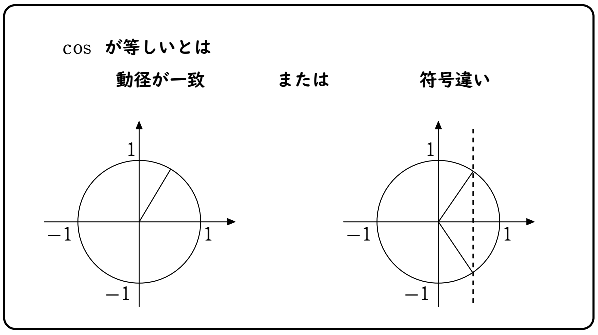
(1) θ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ。

＜ ’12 早稲田大 改 ＞

【戦略】

(1) **三角関数の方程式ですが，左辺と右辺で同じ** cos **の服を着ていますから，「中身比べ型」で処理します。**



n **を整数として**

$$3\theta = 2\theta + 2n\pi,\ \ 3\theta = -2\theta + 2n\pi$$

すなわち， $\theta = 2n\pi,\ \dfrac{2n}{5}\pi$ **ということになります。**

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ **の範囲では，** $\theta = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi$ **を得ます。**

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,\ \ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

なので， $2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ **，すなわち**

$$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

という $\cos\theta$ **に関する** 3 **次方程式を得ます。**

この左辺を因数分解すると

$$(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$$

であり， $\cos\theta = 1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ **ということになります。**

もともと， $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ **を満たす** $\theta\left(=0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi\right)$ **に対する** $\cos\theta$ **の値が** $1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ **に対応するわけです。**

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ **の範囲では** $\cos\theta$ **は単調減少であることも加味すると**

$\theta = 0$ **に対して** $\cos\theta = 1$

$\theta = \dfrac{2}{5}\pi$ **に対して** $\cos\theta\left(=\cos\dfrac{2}{5}\pi\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\theta = \dfrac{4}{5}\pi$ **に対して** $\cos\theta\left(=\cos\dfrac{4}{5}\pi\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

と対応することになります。

【解答】

(1) n を整数として $3\theta = 2\theta + 2n\pi$ または $3\theta = -2\theta + 2n\pi$

すなわち $\theta = 2n\pi,\ \dfrac{2n}{5}\pi$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲では，$\theta = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi$ …答

(2) $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ より，$2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

これは $(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$ と変形できるので

$$\cos\theta = 1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

これが意味するのは，$\cos 2\theta = \cos 3\theta$ を満たす $\theta\left(=0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi\right)$ に対して，$\cos\theta = 1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ であるということである。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\cos\theta$ は単調減少であるため

$$\cos 0 = 1,\ \ \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \ \cos\frac{4}{5}\pi = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

となる。

以上から，求める $\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta = 1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$ …答

【総括】

例えば

　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
を満たす θ を求めよ。

という問題であれば，$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$ から

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$-1$ を得て，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では $\theta = \dfrac{\pi}{3}$，π を得ます。

つまり，$\cos\theta$ の値を経由して，θ の値を求めるわけです。

それに対して，本問の場合

$\cos 2\theta = \cos 3\theta \ \rightarrow\ \cos\theta = 1$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

$\rightarrow\ \theta =$

と，$\cos\theta$ の値を経由して θ を求めることはできないでしょう。

そういった意味で，本問は「三角関数の方程式」の話題としても教訓を含んでいるでしょう。

なお，$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ の形で表される多項式 $T_n(x)$ を

（第 1 種）チェビシェフの多項式

と言います。

例

$\cos 1\theta = \cos\theta$ なので，$T_1(x) = x$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ なので，$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ なので，$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1\\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$
なので，$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

本問は $T_2(x) = T_3(x)$ という方程式を利用して，

$$\cos\frac{2}{5}\pi\ (=\cos 72^\circ),\quad \cos\frac{4}{5}\pi\ (=\cos 144^\circ)$$

の値を求めていたことになります。

このあたりの誘導は多少の亜種があります。

参考までに【参考類題】も用意しましたので，ご活用ください。