1 辺の長さが 2 の正五角形 ABCDE において，対角線 AD と CE の交点を F とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 DF の長さを求めよ。

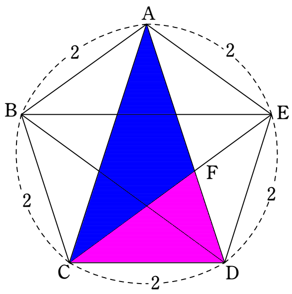
(2)　$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

(3)　正五角形 ABCDE の面積を求めよ。

＜ ’97　岐阜大 ＞

【戦略】

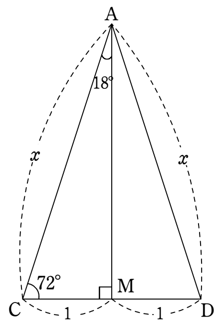
(1)　**色々見えますが，$\triangle$ACD という黄金三角形に注目し，CF によって黄金分割されていることに注目します。**



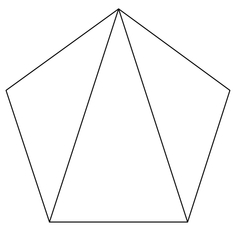
第 1 講同様のシナリオで AD$=x$ とおき，$\triangle$ACD $\backsim$ $\triangle$CDF を利用して x を求めていきます。

(2)　**これも (1) 同様に第 1 講で学習した**
黄金三角形を真っ二つ
という態度で行けば

$\sin 18^\circ=\dfrac{\text{CM}}{\text{AC}}$ **として求まります。**



(3)　**これも色々見方があると思いますが**



と，黄金 (鈍角) 三角形 2 つと，黄金 (鋭角) 三角形に分割します。

面積計算の際，必要なのは $\sin 108^\circ$，$\sin 72^\circ$ **ですが，**

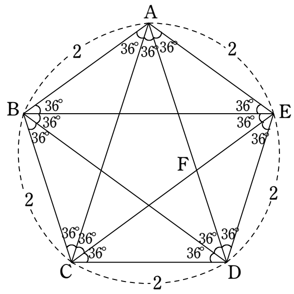
$$\sin 108^\circ=\sin(180^\circ-72^\circ)=\sin 72^\circ$$

なので，結局は $\sin 72^\circ$ **の情報が得られれば解決です。**

(2) の黄金三角形を真っ二つという態度で同様に $\sin 72^\circ$ **が求まります。**

2 重根号が外れず，少し汚い形にはなりますが，落ち着いて整理していきましょう。

【解答】



(図 1)

(1)　$\triangle$CDF は CD$=$CF の二等辺三角形
$\triangle$FAC は FA$=$FC の二等辺三角形

ゆえに，CD$=$CF$=$AF$=2$

AD$=x$ とおくと，DF$=x-2$

$\triangle$ACD $\backsim$ $\triangle$CDF より

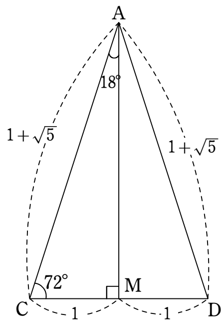
$$x:2=2:(x-2)$$

これより，$x^2-2x-4=0$ を得る。

これを解いて，$x=1\pm\sqrt{5}$

$x>0$ より，$x=1+\sqrt{5}$

DF$=x-2=\sqrt{5}-1$ …答



(図 2)

(2)　(1) より $\triangle$ACD は (図 2) のような状態となる。

線分 CD の中点を M とし，直角三角形 ACM に注目すると

$$\sin 18^\circ=\frac{\text{CM}}{\text{AC}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ \text{…答}$$

(3)　(図 2) において

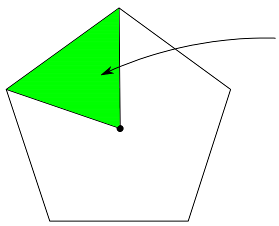
$$\begin{aligned}\text{AM}&=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1^2}\\&=\sqrt{5+2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\sin 72^\circ=\frac{\text{AM}}{\text{AC}}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

求める面積 S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\text{ABC}+\triangle\text{ACD}+\triangle\text{ADE}\\&=2\,\triangle\text{ABC}+\triangle\text{ACD}\\&=2\left\{\frac{1}{2}\cdot\text{BA}\cdot\text{BC}\cdot\sin 108^\circ\right\}+\frac{1}{2}\cdot\text{AC}\cdot\text{CD}\cdot\sin 72^\circ\\&=4\sin 108^\circ+(1+\sqrt{5})\sin 72^\circ\\&=(5+\sqrt{5})\sin 72^\circ\quad(\sin 108^\circ=\sin(180^\circ-72^\circ)=\sin 72^\circ\ )\\&=(5+\sqrt{5})\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\&=\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}}{4}\\&=\frac{\sqrt{400+160\sqrt{5}}}{4}\\&=\frac{\sqrt{16(25+10\sqrt{5})}}{4}\\&=\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\ \text{…答}\end{aligned}$$

【戦略 2】(3) について



【解 2】(3) について

この正五角形の外接円の中心を O とすると，$\angle \mathrm{AOB}=72^\circ$

また，この正五角形の外接円の半径を r とする。

$\triangle \mathrm{OAB}$ で余弦定理より，

$$\begin{aligned} 2^2&=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot \cos 72^\circ \\ &=2r^2-2r^2\sin 18^\circ \end{aligned}$$

整理すると，$(1-\sin 18^\circ)r^2=2$

これより，

$$\begin{aligned} r^2&=\frac{2}{1-\sin 18^\circ} \\ &=\frac{2}{1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}} \\ &=\frac{8}{5-\sqrt{5}} \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} \cos^2 18^\circ&=1-\sin^2 18^\circ \\ &=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &=\frac{5+\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

$\cos 18^\circ>0$ より，$\cos 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot \sin 72^\circ \\ &=\frac{1}{2}r^2\cos 18^\circ \\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ &=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}} \end{aligned}$$

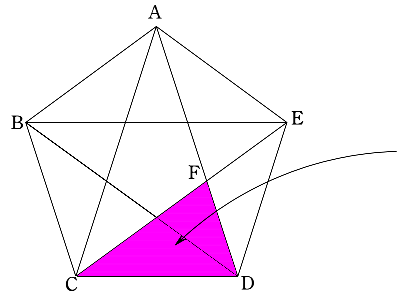
求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S&=5\triangle \mathrm{OAB} \\ &=5\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}} \\ &=5\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} \\ &=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(5+\sqrt{5})^3}}{4} \\ &=\frac{\sqrt{2}\sqrt{200+80\sqrt{5}}}{4} \\ &=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} \\ &=\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

正五角形は黄金三角形祭りで，ゴールドラッシュです。

数字を出すだけであれば



ここの黄金三角形に注目して

$$\begin{aligned} \mathrm{DF}&=\frac{2}{\phi} \\ &=\frac{2}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &=\frac{4}{\sqrt{5}+1} \\ &=\sqrt{5}-1 \end{aligned}$$

黄金三角形の辺の比率は $\phi:1$ ということは第 1 講でやりました。

と手際よく求めることができると思います。

(3) の面積に関しては個人的に【解 1】のように黄金三角形に分割した方が考えやすかったですが，【解 2】のように外心を絡めて 5 つに分割する方法の方が先に見えるという人もいると思います。(このあたりは個人差があるでしょう。)

本問のように正五角形経由で 18° 絡みの三角比を考える路線の問題もよく出題されますので，場当たり的にならないようしっかりとストーリーを確認してください。