18° 絡みの三角比１【黄金三角形の黄金分割】

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\mathrm{BC}=1$，$\angle\mathrm{ABC}=72°$ の三角形 ABC を考える。
$\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線と辺 AC の交点を D とする。次の問いに答えよ。

(1) AD の長さと AC の長さを求めよ。

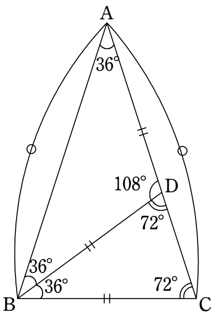
(2) $\cos 72°$ を求めよ。

(3) 三角形 ABD の内接円の半径を r，三角形 CBD の内接円の半径を s とするとき，$\dfrac{r}{s}$ の値を求めよ。

＜ '09 大阪教育大 ＞

【戦略】

二等辺三角形祭りです。



(1) **即座に** $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{BC}=1$
と言えますので，$\mathrm{AD}=1$ **が得られます。**

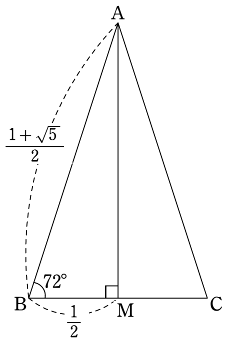
また，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ **とおくと**
$\mathrm{CD}=x-1$ **となります。**

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ **なので**

$x:1=1:x-1$ **という相似比から，**$x^2-x-1=0$ **を得るため**

$x>0$ **の方である** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **を得ることになります。**

(2) **この二等辺三角形を「真っ二つ」に切ってやると，三角比の定義により所望の** $\cos 72°$ **が**



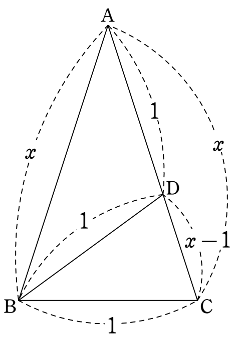
$$\cos 72°=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}$$

を計算することで得られます。

(3) **内接円の半径を考えるにあたり，**

$$\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DB})=\triangle\mathrm{ABD},\ \frac{s}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB})=\triangle\mathrm{BCD}$$

と面接を考えることになります。



ここから，$\dfrac{r}{s}$ **を考えると，**

$$\frac{r}{s}=\frac{\dfrac{2\triangle\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}}}{\dfrac{2\triangle\mathrm{BCD}}{\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB}}}$$

$$=\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{BCD}}\cdot\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}}$$

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{1+(x-1)+1}{x+1+1}$$

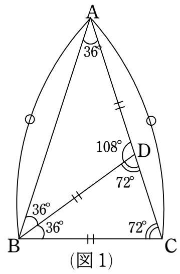
$$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+2}$$

と，x **の式で得られ，**x **は具体的に分かっているので，解決です。**

計算するにあたっては，「次数下げ」の工夫をします。

【解答】

(1) 各々の角度の状況は (図 1) のようになっており



(図 1)

$\triangle\mathrm{BCD}$ は $\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$ の二等辺三角形。
$\triangle\mathrm{DAB}$ は $\mathrm{DA}=\mathrm{DB}$ の二等辺三角形。

よって，$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=1$

以上から，$\mathrm{AD}=1$ … 答

また，$\mathrm{AC}=x$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$

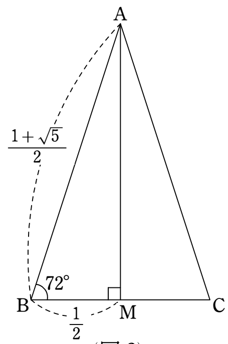
よって $x:1=1:x-1$ で，$x(x-1)=1$ を得て，これを整理すると

$$x^2-x-1=0$$

これを解くと，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ で，$x>0$ なので，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，$\mathrm{AC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ … 答

(2) (1) より (図 2) のようになる。



(図 2)

辺 BC の中点を M とすると
$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ であり，直角三角形 ABM
に注目すれば

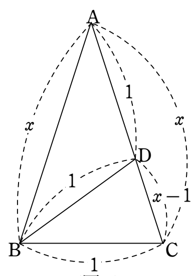
$$\cos 72°=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ \cdots \text{答}$$

(3) $\dfrac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DB})=\triangle\mathrm{ABD}$，$\dfrac{s}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB})=\triangle\mathrm{BCD}$

これより，$r=\dfrac{2\triangle\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}}$，$s=\dfrac{2\triangle\mathrm{BCD}}{\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB}}$



(図 3)

$$\frac{r}{s}=\frac{\dfrac{2\triangle\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}}}{\dfrac{2\triangle\mathrm{BCD}}{\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB}}}$$

$$=\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{BCD}}\cdot\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}}$$

高さ共通で
面積比＝底辺比

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{1+(x-1)+1}{x+1+1}\quad(\because(\text{図 }3))$$

$$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+2}$$

$$=\frac{x+1}{x^2+x-2}$$

次数下げ

$$=\frac{x+1}{(x+1)+x-2}\quad (\because\ x^2-x-1=0\ \text{より},\ x^2=x+1)$$

$$=\frac{x+1}{2x-1}$$

仮分数→帯分数
商 $+\dfrac{\text{余り}}{2x-1}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2x-1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}$$

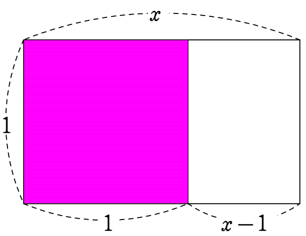
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\quad\cdots 答$$

【総括】

長方形 A から正方形を切り取って

残った長方形を B とします。



A と B が相似であるとき，長方形 A を

黄金長方形といい，その縦横比を

$1:x\ \ (x>0)$ とすると

$1:x=x-1:1$ で，$x(x-1)=1$

これを整理すると $x^2-x-1=0$ で，$x>0$ なので，

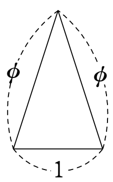
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\ =\phi\ と呼ぶ\ )$$

この値 ϕ を黄金数と言います。

（$1:\phi$，あるいは $2:1+\sqrt{5}$ といった比は黄金比と呼ばれ，古来より人類が最も美しく感じる比率として，ミロのヴィーナスやパルテノン神殿などをはじめとする様々な文化財においても用いられています。）

注：$\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ という分数は分数自体比を表すことから，これを黄金比 と呼ぶこともあるようです。

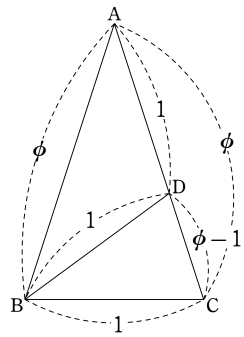
今回の三角形は「黄金三角形」と呼ばれるもので



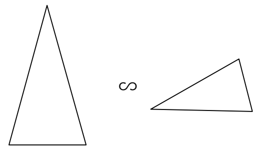
と，辺の比が $\phi:1$ となっているものです。

この ϕ は元々 $x^2-x-1=0$ という 2 次方程式，もっと言うと $1:x=x-1:1$ を満たすものとして出てきたものなので $1:\phi=\phi-1:1$ を満たしています。

このことから

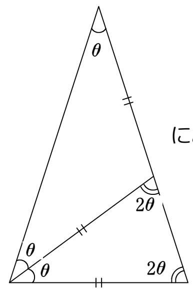


このように分割することで，長方形と同じく



と，自己相似構造が現れます。

この黄金三角形は

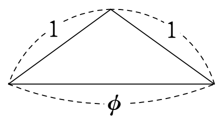


において，$5\theta=180°$ より，$\theta=36°$ となります。

つまり，黄金三角形の頂角が 36° となっているのであって，

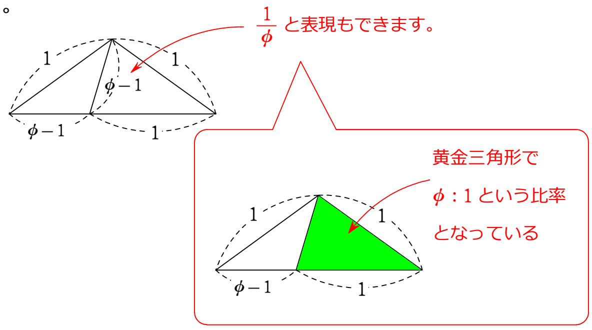
頂角が 36° の二等辺三角形は**結果的に**黄金三角形と呼ばれることになります。

ちなみに，

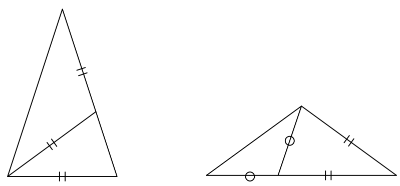


という二等辺三角形も黄金三角形と呼ばれます。

この場合，



と分割できます。



といった分割は黄金分割と呼ばれています。