複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点Pにおける円 C の接線に関して，点Aと対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

＜ '18 東京大 ＞

【戦略1】

まずは図をかいて状況を把握しましょう。複素数平面における攻め方としては

①：複素数平面における翻訳を考える（複素数のまま考える）

②：$z=x+yi$ などとおき，xy 平面の話にする（実部，虚部をもちだす）

が考えられます。

本問は対称移動を扱うことになります。

xy 平面の話なら処理はできるでしょうから，試験場で思いつかなければ ② の路線で実部虚部を持ち出してゴリゴリ押していく作戦もやむを得ません。

① の路線で攻めることを考えると，複素数平面における対称移動の中で，唯一即座に処理できる対称移動は「実軸に関する対称移動」しかありません。実軸に関する対称移動についてはバーをとれば(共役複素数を考えれば) 即座に対称移動が完了します。

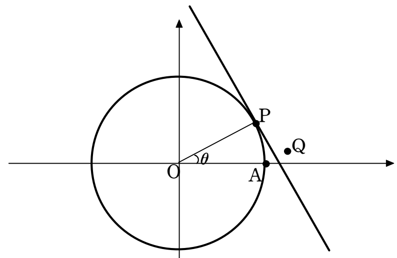
そこで，今回の対称軸を実軸に重ねるような変換を施して，共役複素数を考えることで対称移動についての2点の関係を Get しようと思います。

(2) についてはひとまずは素直に $w=X+Yi$ などとおき，(1) の式を利用して X, Y の関係式を求めたいと思います。

z の範囲が限られているので，当然 w の範囲も限られることに注意して軌跡の限界にも気を配りましょう。

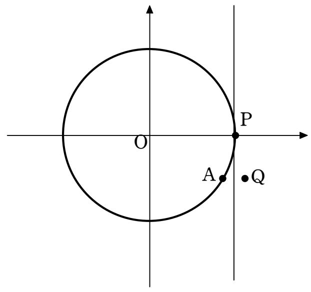
【解答】

(1)



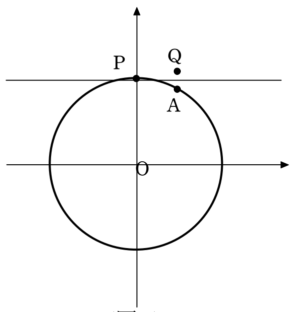
(図1)

(図1) の状態から $-\theta$ 回転させると，(z^{-1} をかけると) (図2) の状態になる。



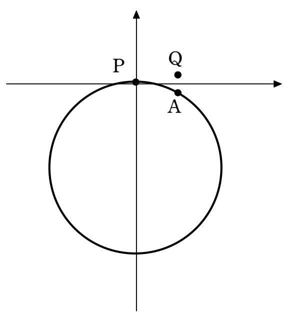
(図2)

(図2) の状態から 90° 回転させると，(i をかけると) (図3) の状態になる。



(図3)

(図3) の状態から虚軸方向に -1 平行移動させると（i を引くと）



(図4)

(図4) の A に相当する複素数は

$$1\times\frac{1}{z}\times i-i=\frac{i}{z}-i$$

また，このときの Q に相当する複素数は

$$u\times\frac{1}{z}\times i-i=\frac{iu}{z}-i$$

これらは共役な複素数であるから

$$\frac{iu}{z}-i=\overline{\left(\frac{i}{z}-i\right)}$$

これを整理すると，$i\left(\frac{u}{z}-1\right)=-\frac{i}{\overline{z}}+i$

両辺 i で割ると，$\frac{u}{z}-1=-\frac{1}{\overline{z}}+1$

$|z|^2=1$ で，$z\,\overline{z}=1$，すなわち $\frac{1}{\overline{z}}=z$ に注意すると

$$\frac{u}{z}-1=-z+1$$

これより，$u=-z^2+2z$ $\cdots$ $\boxed{答}$

また，$w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1+z^2-2z}$ $\cdots(☆)$

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\frac{1}{1+(\overline{z})^2-2\,\overline{z}}\\&=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\frac{2}{z}}\quad\left(\because\ \overline{z}=\frac{1}{z}\right)\\&=\frac{z^2}{z^2-2z+1}\end{aligned}$$

ゆえに，$\frac{\overline{w}}{w}=\frac{\frac{z^2}{z^2-2z+1}}{\frac{1}{z^2-2z+1}}=z^2$ $\cdots$ $\boxed{答}$

また，
$$\begin{aligned}\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}&=\left|1+\frac{\overline{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|\\&=|1+z^2-(z^2-2z+1)|\quad(\because\ (☆))\\&=|2z|\\&=2\ \cdots\ \boxed{答}\end{aligned}$$

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $\left(-\frac{5}{3}\pi\leqq\theta\leqq-\frac{\pi}{3}\right)$ とおける。

$w=X+Yi$ とすると，(1) の結果 $\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2$ より

$\frac{|(X+Yi)+(X-Yi)-1|}{\sqrt{X^2+Y^2}}=2$，すなわち $|2X-1|=2\sqrt{X^2+Y^2}$

よって，$(2X-1)^2=4(X^2+Y^2)$，すなわち $X=-Y^2+\frac{1}{4}$ を得る。

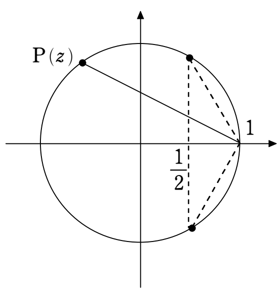
また，(☆) より，$w=(z-1)^{-2}$ であり，ド・モアブルの定理から

$\arg w=-2\arg(z-1)$

(図5) より

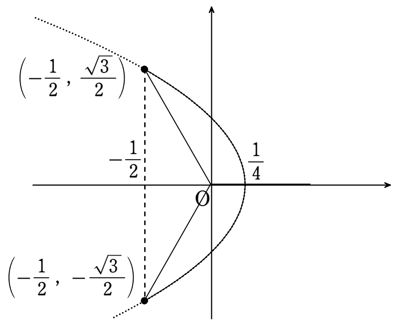
$\frac{2}{3}\pi\leqq\arg(z-1)\leqq\frac{4}{3}\pi$

これより，$-\frac{8}{3}\pi\leqq\arg w\leqq-\frac{4}{3}\pi$



(図5)

この w の偏角の範囲は $-\frac{2}{3}\pi\leqq\arg w\leqq\frac{2}{3}\pi$ と同じである。



(図6)

したがって，点 R(w) の軌跡は放物線 $x=-y^2+\frac{1}{4}$ の $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{4}$ を満たす部分（図示すると(図6)の実線部）

【cf】

(1) の $\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2$ といういかにも意味ありげな結果を考えてみます。

分母を払えば $|w+\overline{w}-1|=2|w|$ で，$\left|\frac{w+\overline{w}}{2}-\frac{1}{2}\right|=|w|$

よって，xy 平面において，R から直線 $x=\frac{1}{2}$ に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\mathrm{RH}=\mathrm{OR}$$

が成立することになります。（$\frac{w+\overline{w}}{2}$ は R の x 座標を表しています。）

つまりこれは，R の軌跡が O を焦点，$x=\frac{1}{2}$ を準線とする放物線であることを意味することになります。

【(1) 戦略 2　〜 u を得る部分〜】

$z=s+ti$（s，t は実数）**などと実部虚部を持ち出し，xy 平面の話で考えるという方針も緊張した試験場では十分考えられる方針です。**

この路線は思いつきやすい反面，計算が膨らむことも多々ありますから，計算に耐えきるだけの処理力を兼ね備えましょう。

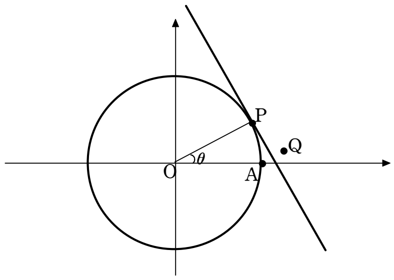
今回は $|z|=1$ を満たしていることから，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく，つまり $\mathrm{P}(\cos\theta，\sin\theta)$ とおき，見慣れた xy 平面での処理に持ち込みたいと思います。

対称移動に関する処理はベクトルで処理する定番の処理でやってみます。（知らなかった人はぜひレパートリーに加えておくといいでしょう。）

【解 2】

$|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける。

すなわち $\mathrm{P}(\cos\theta，\sin\theta)$ とおける。



P における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y-1=0$

線分 AQ と ℓ の交点を H とし，$\mathrm{AH}=d$ とおくと，点と直線の距離公式から

$$\begin{aligned}
d&=\frac{|\cos\theta-1|}{\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}\\
&=1-\cos\theta\\
&=1-\frac{z+\overline{z}}{2}\\
&=1-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\quad\left(\because |z|=1 \text{ より } z\overline{z}=1 \text{ で } \overline{z}=\frac{1}{z}\right)\\
&=\frac{-(z-1)^2}{2z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2d\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\quad(\because \mathrm{OP}/\!/\mathrm{AH},\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1)\\
&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\frac{(z-1)^2}{z}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
u&=\left\{1-\frac{(z-1)^2}{z}\cos\theta\right\}+\left\{-\frac{(z-1)^2}{z}\sin\theta\right\}i\\
&=1-\frac{(z-1)^2}{z}\{\cos\theta+i\sin\theta\}\\
&=1-\frac{(z-1)^2}{z}z\\
&=-z^2+2z\ \cdots 答
\end{aligned}$$

（ $\dfrac{\overline{w}}{w}$ ，$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ については本解答に準じる ）

※　ベクトルで $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2d\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と処理しましたが，もう少し複素数平面寄りに踏み込んで $w=1+2dz$ として欲しいです。

【(2) 戦略 2　～軌跡の限界を得る部分～】

軌跡の概形が放物線であることは前述のように放物線の幾何的定義から見抜こうが，【解答】のように $w=X+Yi$ とおいて X, Y の関係式を求めようが，正直何とでもなります。

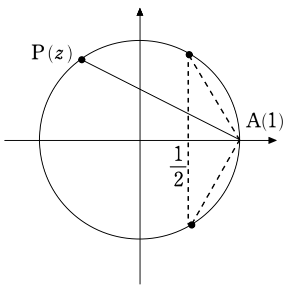
どちらかというと軌跡の限界（範囲）を求める部分において，エネルギーを使うかと思います。

【解答】では w の偏角の範囲から軌跡の限界を求めましたが，w の絶対値から軌跡の限界を求めてみます。

【解 3】(2) 部分的別解

（ $w=X+Yi$ とおいて，$X=-Y^2+\frac{1}{4}$ を得る部分までは同じ。）

ここで，P が C' 上を動くとき
図から $1 \leqq \mathrm{PA} \leqq 2$
すなわち $1 \leqq |z-1| \leqq 2$
辺々正の値なので，$1 \leqq |z-1|^2 \leqq 4$



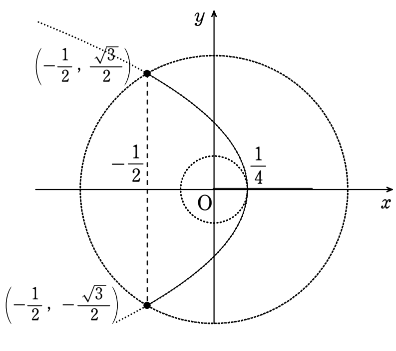
$w=\frac{1}{(z-1)^2}$ （【解答】(☆) 参照）であるから

$|w|=\frac{1}{|z-1|^2}$ であり，$|z-1|^2=\left|\frac{1}{w}\right|$

よって，$1 \leqq \left|\frac{1}{w}\right| \leqq 4$，すなわち，$\frac{1}{4} \leqq |w| \leqq 1$ を得る。

これより，点 $\mathrm{R}(w)$ は原点中心半径が 1 と $\frac{1}{4}$ の円によってできる円環の部分に存在する。

以上を踏まえて図示すると



【総括】

(1) の対称軸を実軸に合わせる変換を施す方針や，(2) の【cf】で述べた放物線の幾何的定義に基づく方針などは鮮やかである反面，試験場では思いつきにくい解法です。

特に (1) の対称軸を実軸に合わせる変換を施す方針は，守備範囲の広い考え方なので，勉強の段階では割り切ってレパートリーの一つとして取り入れてしまうのも今後のためかもしれません。

これがレパートリーに入っていない状態で試験を迎えた，あるいは緊張した試験場で浮かばなかった場合は xy 平面の話でゴリゴリ進める【解 2】の方針にシフトチェンジするのが現実的でしょう。

ちなみに，これほどまで上手く作られた本問の背景には

円の垂足曲線はカージオイドであり，カージオイドを反転すると放物線となる

という事実があります。（1 次分数変換は反転変換を表す）

垂足曲線とは，定点から曲線の各点における接線に引いた垂線の足の軌跡のことです。