n を正の整数とする。$f_1=f_2=1$，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ で定まる数列 $\{f_n\}$ に対して

$$f_n x^2+f_{n+1}x+f_{n+2}=0 \quad \cdots (*)$$

という x の 2 次方程式を考える。

(1) すべての自然数 n に対して，$f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1}$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$(*)$ は異なる 2 つの虚数解をもつことを示せ。

(3) 複素数平面において $(*)$ の異なる 2 つの虚数解が表す点は，ある定円上にあることを示せ。
また，その定円の半径と，中心の点が表す複素数を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) **漸化式で定まる数列に対する証明なので，数学的帰納法です。**

(2) **判別式をとれば，(1) の活用法が見込めます。**

(3) **解と係数の関係を考えると，一気に視界が開けていきます。**

【解答】

(1) $f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2=(-1)^{n-1}$ $\cdots$ (☆) であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき　$f_1=f_2=1$ であるから，$f_3=2$

$f_3f_1-f_2{}^2=2\cdot1-1^2=(-1)^0$ であり，(☆) は成立する。

(ii) $n=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2=(-1)^{k-1}$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned}
f_{k+3}f_{k+1}-f_{k+2}{}^2&=(f_{k+2}+f_{k+1})f_{k+1}-f_{k+2}{}^2\\
&=f_{k+2}f_{k+1}+f_{k+1}{}^2-f_{k+2}{}^2\\
&=f_{k+2}(f_{k+2}-f_k)+f_{k+1}{}^2-f_{k+2}{}^2\\
&=-f_{k+2}f_k+f_{k+1}{}^2\\
&=-(f_{k+2}f_k-f_{k+1}{}^2)\\
&=-(-1)^{k-1}\quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\\
&=(-1)^k
\end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも (☆) は成立する。

(i)，(ii) より，(☆) が示され，題意は示された。

(2) $(*)$ の判別式を D_n とすると，$D_n=f_{n+1}{}^2-4f_{n+2}f_n$

$$\begin{aligned}
D_n&=f_{n+1}{}^2-f_{n+2}f_n-3f_{n+2}f_n\\
&=-(f_{n+2}f_n-f_{n+1}{}^2)-3f_{n+2}f_n\\
&=-(-1)^{n-1}-3f_{n+2}f_n\\
&=(-1)^n-3f_{n+2}f_n
\end{aligned}$$

$m=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

(Ⅰ) $n=2m$ のとき

$D_{2m}=1-3f_{2m+2}f_{2m}$

$f_2,\ f_4,\ f_6,\ \cdots$ は単調増加ゆえ

$D_{2m}=1-3f_{2m+2}f_{2m}<1-3f_4f_2<0$

(Ⅱ) $n=2m-1$ のとき

$D_{2m-1}=-1-3f_{2m+1}f_{2m-1}<0$ ($\because$ $f_1,\ f_2,\ \cdots$ は正の整数)

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，n の偶奇に関わらず，$D_n<0$

以上から，$(*)$ は異なる 2 つの虚数解をもつことが示された。

(3) $(*)$ は実数係数ゆえ，$(*)$ の虚数解の 1 つを α とすれば，もう一方の解は $\overline{\alpha}$ である。

解と係数の関係から，$\begin{cases} \alpha+\overline{\alpha}=-\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & \cdots ① \\ \alpha\overline{\alpha}=\dfrac{f_{n+2}}{f_n} & \cdots ② \end{cases}$

② より

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha} &= \frac{f_{n+1}+f_n}{f_n} \\ &= \frac{f_{n+1}}{f_n}+1 \\ &= -\alpha-\overline{\alpha}+1 \quad (\because ①) \end{aligned}$$

これより，

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}-1=0$$

$$(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=2$$

$$(\alpha+1)(\overline{\alpha+1})=2$$

$$|\alpha+1|^2=2$$

$$|\alpha+1|=\sqrt{2}$$

ゆえに，α は複素数平面において，点 -1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の上にある。

$\overline{\alpha}$ についても同じ円の上にある。

以上から，$(*)$ の虚数解は複素数平面において，

点 -1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の上にある。… 答

【総括】

(1) はカッシーニ・シムソンの定理と呼ばれる有名な定理です。

本当は (1) をカットしようかとも考えましたが，それはこの定理のマニアック度を考えてやめておきました。（みんながみんなご存じというわけでもないし，そこで差をつけたくない）

(2) は判別式をとると，カッシーニ・シムソンの定理を活用したくなる形です。

というより，この問題を作ったキッカケは，カッシーニ・シムソンの定理が判別式の形に似ているなと思ったところから始まりました。

オチについても，「解と係数の関係でもとってみるか」と作ったところ，定円の上にあるという，意外とキレイなオチになったので，それをそのまま問題にしたものです。