複素数平面上の点 $\mathrm{A}_n\,(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおき，点 $\mathrm{B}_n\,(b_n)$ を定める。

(1) 3点 B_1，B_2，B_3 を通る円 C の中心を表す複素数と半径を求めよ。

(2) 全ての点 B_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は，円 C の周上にあることを示せ。

＜ ’01 東京大 ＞

【戦略】

(1) **具体的に b_1，b_2，b_3 が出ますから，その3点を通る円の方程式を出すことについて悩む余地がありません。**

計算量がエグいという要素があるわけでもなく，あっさり片付けたいところです。

(2) **漸化式で定まる複素数列 $\{b_n\}$ についての証明問題ですから，数学的帰納法という一手でしょう。**

帰納法の処理を考えると，b_{n+1} と b_n の間の関係式を出すのが自然です。

【解答】

(1) $a_1=1$，$a_2=i$ より $a_3=1+i$，$a_4=1+2i$

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}=i\ ,\ b_2=\frac{a_3}{a_2}=\frac{1+i}{i}=1-i\ ,\ b_3=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

ゆえに，求める円 C は3点 $(0,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る円である。

よって，C の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおくと

$$\begin{cases} 1+b+c=0 \\ a-b+c=-2 \\ \dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}b+c=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

これら3式から，$a=-1$，$b=0$，$c=-1$

ゆえに，円 C は $x^2+y^2-x-1=0$ で，これを変形すると

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$$

これより，円 C の中心を表す複素数は $\dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ … 答

(2)
$$\begin{aligned} b_{n+1}&=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} \\ &=1+\frac{1}{b_n} \end{aligned}$$

まずは $\{b_n\}$ についての漸化式をＧｅｔしたいところです。

複素数平面上の円 C は $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ と表されるので，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\ \cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき 円 C は点 B_1 を通る
（元々 B_1 を通るような円を C としている）

(ii) $n=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$\left|b_k-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であると仮定する。

このとき，$\left(b_k-\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{b_k}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

これを展開すると $b_k\overline{b_k}-\dfrac{1}{2}(b_k+\overline{b_k})-1=0$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}(b_k+\overline{b_k})=b_k\overline{b_k}-1$ …(☆)

このとき

$$\begin{aligned}\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|^2&=\left|\left(1+\frac{1}{b_k}\right)-\frac{1}{2}\right|^2\\&=\left|\frac{1}{b_k}+\frac{1}{2}\right|^2\\&=\left(\frac{1}{b_k}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\overline{b_k}}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{b_k\overline{b_k}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_k}+\frac{1}{\overline{b_k}}\right)+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{b_k\overline{b_k}}+\frac{1}{2}\,\frac{b_k+\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{b_k\overline{b_k}}+\frac{b_k\overline{b_k}-1}{b_k\overline{b_k}}+\frac{1}{4}\quad(\because(☆))\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

となり，$\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ。

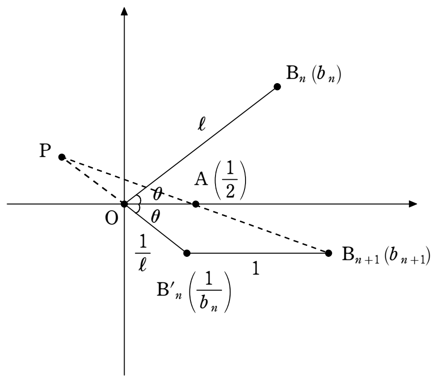
(i)，(ii) より，$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立ち，
点 B_n（$n=1,2,\cdots$）は，円 C の周上にあることが示された。

【参考】

複素数平面上で，$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ という関係式を図形的に処理してみます。

$b_n=\ell(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると，$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{\ell}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

よって，$1+\dfrac{1}{b_n}$ で表される複素数 b_{n+1} が表す点は下の図のようになります。



線分 $\mathrm{OA}\parallel\mathrm{B}'_n\mathrm{B}_{n+1}$，$\mathrm{OA}:\mathrm{B}'_n\mathrm{B}_{n+1}=1:2$ なので，図の三角形 $\mathrm{PB}'_n\mathrm{B}_{n+1}$ において中点連結定理から，O，A はそれぞれ線分 PB'_n，PB_{n+1} の中点ということになります。

ここで，$\mathrm{B}_n(b_n)$ が A を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 円上にあると仮定します。

$\triangle\mathrm{OAB}_n$ で余弦定理を用いると，$\cos\theta=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ell^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ell}=\dfrac{\ell^2-1}{\ell}$

一方，$\triangle\mathrm{PB}'_n\mathrm{B}_{n+1}$ で余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PB}_{n+1}{}^2&=\left(\frac{2}{\ell}\right)^2+1^2-2\cdot\frac{2}{\ell}\cdot1\cdot\cos(\pi-\theta)\\&=\frac{4}{\ell^2}+1+\frac{4}{\ell}\cdot\frac{\ell^2-1}{\ell}\\&=\frac{4}{\ell^2}+1+\frac{4\ell^2-4}{\ell^2}\\&=5\end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{PB}_{n+1}=\sqrt{5}$ で，$\mathrm{AB}_{n+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
つまり，$\mathrm{B}_n(b_n)$ が A を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 円上にあると仮定すると，
$\mathrm{B}_{n+1}(b_{n+1})$ も A を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 円上にあることが言えました。

つまり，帰納的に $\mathrm{B}_n(b_n)$ が A を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 円上にあるということになります。

もちろん，三角形の成立条件について触れたりしなければなりませんし，粗が多い解答ですが，視覚化した場合の一つの参考例となると思います。

【総括】

⑴ は不気味なぐらい簡単です。試験場においては落とすことは許されません。

⑵ も複素数とは言え漸化式によって定まる数列に関する証明なので，帰納法という選択肢が自然に浮かびますし，試験場においてはそれ以外の選択肢はないと言ってもいいでしょう。

なまじ「フィボナッチ数列」のようなものが見える分，何かあるのかを疑いたくなりますが，試験場ではまずは結論を出すことに注力したいところです。
くれぐれも策に拘りすぎて貴重な時間を失うことだけは避けなければなりません。

図形的に捉えた方針も載せておきましたが，結局は一番素直な方法が最善だったように思います。