【1】

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$ を求めよ。

【1】【戦略】

連続積の和は有名な形であり，バラバラにすることなく，和の中抜けでスマートに処理しましょう。

初見だとキツイものがありますので，バラバラにしてしまった人は今後の糧にしてください。

【1】【解答】

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1}) \quad (b_k=(k-1)k(k+1) \text{ とおいた})$$
$$=-\frac{1}{3}(b_1-b_{n+1})$$
$$=-\frac{1}{3}\{0-n(n+1)(n+2)\}$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots \text{答}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1}) \quad (b_k=(k-1)k(k+1)(k+2) \text{ とおいた})$$
$$=-\frac{1}{4}(b_1-b_{n+1})$$
$$=-\frac{1}{4}\{0-n(n+1)(n+2)(n+3)\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)\{(k+4)-(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$
$$=-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1}) \quad (b_k=(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3) \text{ とおいた})$$
$$=-\frac{1}{5}(b_1-b_{n+1})$$
$$=-\frac{1}{5}\{0-n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\}$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

第１講で扱った $\sum_{k=1}^{n} k^4$ などはこれを基にして

$$\sum_{k=1}^{n}(k^4+6k^3+11k^2+6k)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-6\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$-\frac{11}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-\frac{3}{2}n^2(n+1)^2$$
$$-\frac{11}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-45n(n+1)-55(2n+1)-90\}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)\{6(n^3+9n^2+26n+24)-45n^2-45n-110n-55-90\}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)\{6n^3+54n^2+156n+144-45n^2-155n-145\}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)\{6n^3+9n^2+n-1\}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

と求めることもできます。

【2】

整数 n について，

$$f(n)=(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)$$

とおく。

m が自然数であるとき， $\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$ を $f(m)$ を用いて表せ。

＜ ’05 大分大 ＞

【2】【戦略】

【1】のシナリオや，モノの見方が見についていれば

$(2k+7)$ **の次の** $(2k+9)$ ， $(2k+1)$ **の前の** $(2k-1)$ **を補って**

$$(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

$$=\frac{1}{10}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\{(2k+9)-(2k-1)\}$$

と見れば， $\frac{1}{10}\{f(k)-f(k-1)\}$ **と差分解できます**

【2】【解答】

$$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\{(2k+9)-(2k-1)\}$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$=\frac{1}{10}\{(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+\cdots\cdots+(f(m)-f(m-1))\}$$

$$=\frac{1}{10}\{f(m)-f(0)\}$$

$$=\frac{1}{10}\{f(m)-945\}\ \cdots 答$$

【総括】

本来は(1)で

k を自然数とするとき，等式

$$f(k)-f(k-1)=a(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

が成立するように，定数 a の値を定めなさい

という設問がありましたが，今回は誘導に頼らない見方をしてほしかったため，カットしました。

【3】

自然数 n に対し，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ とする。

S_n を n を用いて表せ。

＜ '04 和歌山県立医科大 ＞

【3】【戦略 1】

基本は差分解からの和の中抜けを狙っていきます。

4 つの積が分母にいますが，差分解は b_k-b_{k+1} という 2 つの差です。

そういった意識で見れば，

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

という式にたどり着きます。

【戦略 2】

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}+\frac{D}{k+3}$$

が恒等式となるように A，B，C，D を仕組む方向に行くと，できなくはないですが，少し遠回りです。

右辺を通分すると，

$$\frac{A(k+1)(k+2)(k+3)+Bk(k+2)(k+3)+Ck(k+1)(k+3)+Dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(A+B+C+D)k^3+(6A+5B+4C+3D)k^2+(11A+6B+3C+2D)k+6A}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

となりますから，

$$\begin{cases}A+B+C+D=0\\6A+5B+4C+3D=0\\11A+6B+3C+2D=0\\6A=1\end{cases}$$

これら 4 式から，$A=\dfrac{1}{6}$，$B=-\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{1}{2}$，$D=-\dfrac{1}{6}$ を得ます。

つまり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}&=\frac{\frac{1}{6}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}-\frac{\frac{1}{6}}{k+3}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\end{aligned}$$

という差分解の形を得ることができます。

【3】【解答】

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

$b_k=\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\\&=\frac{1}{3}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\}\\&=\frac{1}{3}(b_1-b_{n+1})\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)\\&=\frac{n(n^2+6n+11)}{18}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【解 2】

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}&=\frac{\frac{1}{6}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}-\frac{\frac{1}{6}}{k+3}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\end{aligned}$$

$c_k=\dfrac{1}{k}$ とおくと，

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}(c_k-c_{k+3})-\frac{1}{2}(c_{k+1}-c_{k+2})$$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(c_k-c_{k+3})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_{k+2})\\&=\frac{1}{6}\{(c_1-c_4)+(c_2-c_5)+(c_3-c_6)+(c_4-c_7)+\cdots(c_n-c_{n+3})\}\\&\qquad-\frac{1}{2}\{(c_2-c_3)+(c_3-c_4)+\cdots+(c_{n+1}-c_{n+2})\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{6}\{c_1+c_2+c_3-c_{n+1}-c_{n+2}-c_{n+3}\}-\frac{1}{2}\{c_2-c_{n+2}\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}$$

これを整理すると

$$S_n=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

目的は b_k-b_{k+1} という差分解であることを見失わないようにすれば，別解のように遠回りすることはないと思います。

【4】 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j}$ を求めよ。

＜ '15 横浜市立大 ＞

【4】【戦略 1】

まず認識したいのは

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は $a_n=pn+q$ という n の 1 次式の形

等比数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は $b_n=ar^{n-1}$ という n の指数関数の形

ということです。

ベースは $\sum$(1次式)(指数関数) は (等差)×(等比) 型と見る目が大切であり

(等差)×(等比) 型は第 1 講で扱った通り「カケズラ」(公比をかけてズラす) という態度で倒します。

今回は「$\sum$(2 次式)(指数関数) という形ですけど，どうします？」という問題です。

思いつきやすいのは「同じ態度じゃダメなの？」ということで「カケズラ」をしてみます。

すると，$\sum$(1次式)(指数関数) の形に帰着し，正真正銘の (等差)×(等比) 型となります。

【4】解答

$S=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j}$ とおく。

$$S=1^2\cdot 2^{n-1}+2^2\cdot 2^{n-2}+3^2\cdot 2^{n-3}+\cdots\cdots+n^2\cdot 2^{n-n}$$
$$\frac{1}{2}S=\qquad 1^2\cdot 2^{n-2}+2^2\cdot 2^{n-3}+\cdots+(n-1)^2\cdot 2^{n-n}+n^2\cdot\frac{1}{2}$$

辺々引くと

$$\frac{1}{2}S=1^2\cdot 2^{n-1}+(2^2-1^2)\cdot 2^{n-2}+(3^2-2^2)\cdot 2^{n-3}+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}-\frac{1}{2}n^2$$

$$S=(1^2-0^2)\cdot 2^n+(2^2-1^2)\cdot 2^{n-1}+(3^2-2^2)\cdot 2^{n-2}+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}\cdot 2-n^2$$

よって，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{k^2-(k-1)^2\}\cdot 2^{n+1-k}-n^2$$
$$=2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^{-k}-n^2$$

ここで，$T=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^{-k}$ とおく。

$$T=1\cdot 2^{-1}+3\cdot 2^{-2}+5\cdot 2^{-3}+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{-n}$$
$$\frac{1}{2}T=\qquad 1\cdot 2^{-2}+3\cdot 2^{-3}+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{-n}+(2n-1)\cdot 2^{-n-1}$$

辺々引くと

$$\frac{1}{2}T=1\cdot 2^{-1}+2\,(2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-n})-(2n-1)\cdot 2^{-n-1}$$

$$T=1+2\,(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-(n-1)})-(2n-1)\cdot 2^{-n}$$
$$=1+2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\cdot 2^{-n}$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\cdot 2^{-n}$$
$$=1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-(2n-1)\cdot 2^{-n}$$
$$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$S=2^{n+1}T-n^2$$
$$=2^{n+1}\left\{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-n^2$$
$$=3\cdot 2^{n+1}-\frac{2^{n+1}}{2^{n-2}}-(2n-1)\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n}-n^2$$
$$=3\cdot 2^{n+1}-8-2\,(2n-1)-n^2$$
$$=3\cdot 2^{n+1}-n^2-4n-6\ \cdots 答$$

【4】【戦略 2】

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j}=2^n\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2^j}$ **です。**

そこで，$\dfrac{j^2}{2^j}=b_j-b_{j+1}$ という形で差分解できれば，和の中抜けで解決します。

形としては，$b_j=\dfrac{Pj^2+Qj+R}{2^{j-1}}$ という形で差分解できそうです。

そこで，$b_j=\dfrac{Pj^2+Qj+R}{2^{j-1}}$ として，$\dfrac{j^2}{2^j}=b_j-b_{j+1}$ となるような P，Q，R を求めることにします。

$$\begin{aligned} b_j-b_{j+1}&=\frac{Pj^2+Qj+R}{2^{j-1}}-\frac{P(j+1)^2+Q(j+1)+R}{2^j}\\ &=\frac{2(Pj^2+Qj+R)-P(j^2+2j+1)-Qj-Q-R}{2^j}\\ &=\frac{Pj^2+(-2P+Q)j-P-Q+R}{2^j}\end{aligned}$$

となるので，

$$\frac{Pj^2+(-2P+Q)j-P-Q+R}{2^j}=\frac{j^2}{2^j}$$

が j についての恒等式となればよく

$\begin{cases} P=1\\ -2P+Q=0\\ -P-Q+R=0\end{cases}$ **，すなわち $P=1$，$Q=2$，$R=3$ を得ます。**

これにより，$b_j=\dfrac{j^2+2j+3}{2^{j-1}}$ と定めれば，$\dfrac{j^2}{2^j}=b_j-b_{j+1}$ と差分解できることになり解決します。

答案では，「私こんなすごい式変形思いついちゃいました」というドヤ顔感を出して，天下り式に記述していきます。

【4】【解 2】

$b_j=\dfrac{j^2+2j+3}{2^{j-1}}$ とおいたとき，

$$\begin{aligned} b_j-b_{j+1}&=\frac{j^2+2j+3}{2^{j-1}}-\frac{(j+1)^2+2(j+1)+3}{2^j}\\ &=\frac{2(j^2+2j+3)-(j^2+2j+1)-2j-2-3}{2^j}\\ &=\frac{j^2}{2^j}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{j^2}{2^j}=b_j-b_{j+1}$ と表せる。

したがって，
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j}&=2^n\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2^j}\\ &=2^n\sum_{j=1}^{n}\{b_j-b_{j+1}\}\\ &=2^n\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots\cdots+(b_n-b_{n+1})\}\\ &=2^n(b_1-b_{n+1})\\ &=2^n\left\{6-\frac{(n+1)^2+2(n+1)+3}{2^n}\right\}\\ &=3\cdot 2^{n+1}-n^2-4n-6 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

【解 1】は (等差)×(等比) 型 の派生形と見て，カケズラをやってみたくなります。

やってみたら，解ける形が出てきたという感じでしょう。

一方【解 2】は差分解を狙っていきました。

これは「差分解してやる」という強い気持ちで b_j を探しに行く気がないと思いつかないかもしれません。

【5】 和 $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3$ を求めよ。

＜ ’93 東京農工大 ＞

【5】【戦略 1】

書き下してみると

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3=(-1^3+2^3)+(-3^3+4^3)+\cdots\cdots+\{-(2n-1)^3+(2n)^3\}$$

となり，$\sum_{m=1}^{n}\{(2m)^3-(2m-1)^3\}$ と見ることができます。

すなわち，$\sum_{m=1}^{n}(12m^2-6m+1)$ ですから，あとは公式の運用で終わります。

【戦略 2】

$$\begin{aligned}S&=-1^3+2^3-3^3+4^3-\cdots\cdots-(2n-1)^3+(2n)^3\\T&=\quad 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3+(2n)^3\end{aligned}$$

と符号違いを用意して，奇数番目を消してやることを考えます。

$$\begin{aligned}S+T&=2\cdot2^3+2\cdot4^4+\cdots\cdots+2\cdot(2n)^3\\&=2\{2^3+4^3+\cdots\cdots+(2n)^3\}\\&=2\{(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+\cdots\cdots+(2n)^3\}\\&=2\{2^3(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)\}\\&=16\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\\&=4n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

と求まることと，T 自体も $\sum k^3$ として求まるので，欲しい S も求まります。

【5】【解 1】

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3&=(-1^3+2^3)+(-3^3+4^3)+\cdots\cdots+\{-(2n-1)^3+(2n)^3\}\\&=\sum_{m=1}^{n}\{(2m)^3-(2m-1)^3\}\\&=\sum_{m=1}^{n}(12m^2-6m+1)\\&=12\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\&=2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+n\\&=n\{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)+1\}\\&=n(4n^2+3n)\\&=n^2(4n+3)\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【解 2】

$$\begin{aligned}S&=-1^3+2^3-3^3+4^3-\cdots\cdots-(2n-1)^3+(2n)^3\\T&=\quad 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3+(2n)^3\end{aligned}$$

辺々加えて

$$\begin{aligned}S+T&=2\cdot2^3+2\cdot4^4+\cdots\cdots+2\cdot(2n)^3\\&=2\{2^3+4^3+\cdots\cdots+(2n)^3\}\\&=2\{(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+\cdots\cdots+(2n)^3\}\\&=2\{2^3(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)\}\\&=16\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\\&=4n^2(n+1)^2\ \cdots①\end{aligned}$$

一方，$T=\left\{\frac{2n(2n+1)}{2}\right\}^2=n^2(2n+1)^2\ \cdots②$

② を ① に代入して

$$S+n^2(2n+1)^2=4n^2(n+1)^2$$

$$\begin{aligned}S&=4n^2(n+1)^2-n^2(2n+1)^2\\&=n^2\{4(n+1)^2-(2n+1)^2\}\\&=n^2(4n+3)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3=n^2(4n+3)\ \cdots\text{答}$$

【総括】

「$\sum$(2 次式)(指数関数) という形ですけど，どうします？」

という問いかけですが，その指数関数は符号のみに影響を与える $(-1)^k$ です。

n までの和ではなく，$2n$ までの和ということに注目し，「2 個 1 パック」にして考える【解 1】の方が思いつきやすいと思います。

【解 2】はそれはそれで大事な見方です。

「光に対して影を見る」という態度で，セットで考えることで片割れが求まるという，少し高級なモノの見方です。

【6】 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ を n を用いて表せ。

【6】【戦略】

見慣れない形かもしれませんが，

公式の運用
差分解からの和の中抜け
二項定理の活用

という $\sum$ 計算の手法を考えると，消去法的に和の中抜けを狙っていくのが基本です。

それを狙って

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

と見てやります。

【6】【解答】

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$b_k=\dfrac{1}{k!}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}&=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\\&=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\\&=b_1-b_{n+1}\\&=1-\frac{1}{(n+1)!}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

ネタバレしてしまえば大したことありませんが，初見では慌てる人も多いと思います。

今後の糧にできればヨシでしょう。