自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}n$

(3) ${}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n=2^{2n}$

＜ ’07 大阪府立大 ＞

【戦略】

コンビネーション（二項係数）の $\sum$ と言えば，二項定理の活用をインスピレーションします。

二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1$，$b=x$ とすれば

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

を得ます。

(1) $x=1$ **とすれば即解決です。**

(2) $\sum$ **を用いて表すと，$\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k$ です。**

考えづらいのは $\sum$ の変数 k が 2 カ所に散らかっていることです。

2 カ所で動く k を 1 カ所に集めるために，$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ という関係式を利用します。

これにより，(1) のようなシンプルな形となります。

(3) ${}_{2n+1}\mathrm{C}_k$ **という形ですから，$(1+x)^{2n+1}$ の二項展開を考えます。**

二項係数の対称性 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ を考えれば

$${}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

$$=({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n)+({}_{2n+1}\mathrm{C}_n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n-1}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+{}_{2n+1}\mathrm{C}_0)$$

$$=2\,({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n)$$

と欲しい形を得ることが出来ます。

【解答】

(1) 二項定理より

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

$x=1$ を代入すれば

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n&=(1+1)^n\\&=2^n\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) ${}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k$

$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ であるため

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k&=\sum_{k=1}^{n}n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\&=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\&=n\,({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})\\&=n\cdot2^{n-1}\ (\because (1))\end{aligned}$$

となり，${}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}n$ が成立する。

(3) 二項定理より

$$(1+x)^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_nx^n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}x^{n+1}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}x^{2n+1}$$

${}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+k}={}_{2n+1}\mathrm{C}_{n-(k-1)}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ より

$$(1+x)^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_nx^n+{}_{2n+1}\mathrm{C}_nx^{n+1}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1x^{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_0x^{2n+1}$$

これに $x=1$ を代入すると

$$2^{2n+1}=2\,({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n)$$

これより，${}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n=2^{2n}$

【戦略 2】(1) のイメージ

1 から n までの番号付きの n 枚のコインを投げたとき，その結果が何通りか考えてみると，1 枚のコインにつき 2 通りずつ考えられるので 2^n 通りです。

一方，

表が 0 枚のとき，その結果は ${}_n\mathrm{C}_0$ 通り
表が 1 枚のとき，その結果は ${}_n\mathrm{C}_1$ 通り (どの 1 枚が表なのかが ${}_n\mathrm{C}_1$ 通り)
⋮
表が $n-1$ 枚のとき，その結果は ${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ 通り
(どの $n-1$ 枚が表なのかが ${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ 通り)
表が n 枚のとき，その結果は ${}_n\mathrm{C}_n$ 通り

これらの場合を全て足せば，2^n 通りになるので

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$$

を得ることになります。

【戦略 3】(2) の別解

恐らく

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

でダイレクトに $a=1$，$b=1$ を代入すればいいじゃないかと思った人もいると思います。

なぜ

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

を経由するのかというと，これを両辺 x で微分すると

$n(1+x)^{n-1}=1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2x+3\,{}_n\mathrm{C}_3x^2+\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-1}$ **と得られ**

$x=1$ **を代入することで，**

$$n\cdot2^{n-1}=1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2+3\,{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n$$

と所望の式が得られます。

【総括】

まずは王道的な態度で倒す【戦略 1】の路線をしっかりとマスターしましょう。

特に，(2) で利用した

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\ \text{(変数倍 → 定数倍)}$$

という関係式はこのトピックスのみならず，整数問題などでも度々登場する式変形です。

証明しろと言われたら，

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\\&=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}\\&=\frac{n}{k}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

として，$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が導けます。

これを【戦略 2】のように「場合の数として意味付け」すると

n 人の国民から k 人の国会議員と 1 人のリーダーを選ぶ方法を考えます。

【方法 1】

国会議員の選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通り。

その k 人の中から 1 人のリーダーの選ぶ方法は k 通り。

よって，$k\,{}_n\mathrm{C}_k$ 通り。

【方法 2】

n 人の国民から一人のリーダーを先に決める。その決め方は n 通り。

残った $n-1$ 人の国民からリーダー以外の国会議員 $k-1$ 人を決める。

その決め方は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ 通り。

よって，$n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ 通り。

【方法 1】【方法 2】の場合の数は同じなので，$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

ちなみに【方法 1】は日本の総理大臣の決め方で，【方法 2】はアメリカの大統領の決め方であるため，俗に

「総理大臣と大統領の公式」

などと呼ばれています。(市民権はないので，『 総理大臣と大統領の公式より ～ 』とは書かないでください。)

2 ヵ所に散らばっている変数を 1 ヵ所にまとめるという作業は分野を問わず大切です。