n を 3 以上の自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，

$$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

＜ ’08 熊本大 ＞

【戦略】

(1) **「二項定理の活用その 1」 でも扱った $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ という等式から，もう一段踏み込んだ形です。**

${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n}{k}\cdot\dfrac{n-1}{k-1}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ **とするのがポイントで，シナリオは大きくは変わりません**

(2) **嫌でも (1) の利用が目に付きます。**

(3) **(2) を分配し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k - \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k$ と見ます。**

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k$ については「その 1」で学習済みです。

【解答】

(1) 3 以上の自然数 n，及び $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} \quad \cdots ① \\ &= \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\cdot\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\{(n-2)-(k-2)\}!} \\ &= \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\end{aligned}$$

よって，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ が成立する。

(2) $n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \quad (\because (1)) \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\end{aligned}$$

ここで，二項定理より

$$\begin{aligned}(1+1)^{n-2} &= {}_{n-2}\mathrm{C}_0 + {}_{n-2}\mathrm{C}_1 + {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-3} + {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)\,2^{n-2}$ …答

(3) (2) より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k - \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)\,2^{n-2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k + n(n-1)\,2^{n-2} \quad \cdots ②$$

① より

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\{(n-1)-(k-1)\}\,!} \\ &= \frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

よって，$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= n\,\{{}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\} \\ &= n\,(1+1)^{n-1} \quad (\because \text{二項定理}) \\ &= n\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

② に代入して，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k &= n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)\,2^{n-2} \\ &= n\cdot 2^{n-2}\{2+(n-1)\} \\ &= n(n+1)\,2^{n-2} \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【戦略 2】(2) について

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

という二項展開の式から，両辺 x について微分すれば

$$n(1+x)^{n-1}=1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2x+3\,{}_n\mathrm{C}_3x^2+\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-1}\ \cdots(☆)$$

が得られ，$x=1$ を代入すれば $\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k$ が得られます。

さらに，(☆) を x について微分すれば

$$\begin{aligned}n(n-1)(1+x)^{n-2}&=2\cdot1\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot2\cdot{}_n\mathrm{C}_3x+\cdots+n(n-1)\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-2}\\&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_kx^{k-2}\end{aligned}$$

を得て，これに $x=1$ を代入すれば所望の和が得られます。

【解 2】(2) 別解

二項定理から

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

両辺 x で微分すると

$$n(1+x)^{n-1}=1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2x+3\,{}_n\mathrm{C}_3x^2+\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-1}$$

さらに，両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned}n(n-1)(1+x)^{n-2}&=2\cdot1\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot2\cdot{}_n\mathrm{C}_3x+\cdots+n(n-1)\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-2}\\&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_kx^{k-2}\end{aligned}$$

これに $x=1$ を代入すれば，$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k=n(n-1)2^{n-2}$ …答

【総括】

$\sum k^2{}_n\mathrm{C}_k$ をどのように処理するかという問題で，その 1 で扱った基本をベースとしたシナリオを誘導としてつけてくれています。

ノーヒントかつ初見だとツラいものがあると思いますので，この誘導のシナリオについてはインストールしておきたいところです。