図 1 と図 2 は碁盤の目状の道路であるとし，すべて等間隔であるとする。以下の問いに答えよ。

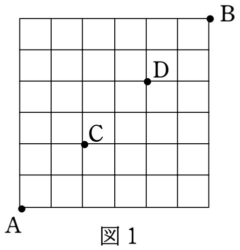


図 1

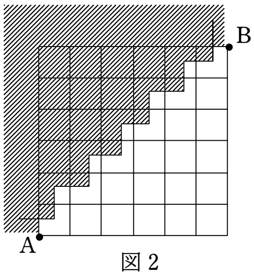


図 2

(1) 図 1 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。
(2) 図 1 において，点 C と点 D のどちらも通らないものは全部で何通りあるか求めよ。
(3) 図 2 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。ただし，斜線の部分は通れないものとする。

＜ ’08 九州大 ＞

【戦略】

(1) **何の条件もないので，→ 6 個と，↑ 6 個の並べ替えを考える基本的な問題です。**

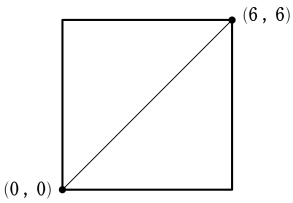
(2) **「通らない」という否定的な事象は考えづらいため余事象を考えます。**

「C を通らない かつ D を通らない」の余事象なので

「C を通る または D を通る」

という場合を考えればよく，各々足してダブりを引くという基本で処理することになります。

(3) **結局は**

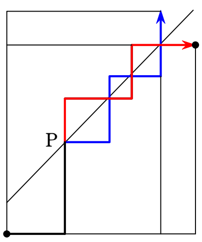


という座標において，$y \leqq x$ の領域のみを通って $(0, 0)$ から $(6, 6)$ まで最短で行く経路の総数を求めることになります。

これについては経験がないとツライのですが，余事象を考えます。

$y > x$ を通るとなると，$y = x + 1$ を一度は「踏む」ことになります。

最初に $y = x + 1$ とぶつかった交点を P とし，P 以降の経路を $y = x + 1$ について折り返した経路を考えると，結局は



のように，$(0, 0)$ から $(5, 7)$ までの経路に対応します。

【解答】

(1) 横に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑と表す。

求める総数は→ 6 個と，↑ 6 個の並べ方の総数に等しく，

$${}_{12}C_6 = 924 \text{【通り】} \cdots \text{答}$$

(2) ［ 点 C，D のどちらも通らない ］の余事象は

［ 点 C，D のうち少なくとも一方を通る ］

であるので，最短経路の総数 924 通りから

「点 C，D のうち少なくとも一方を通る」場合の数を除けばよい。

点 C を通るような最短経路の総数は ${}_4C_2 \times {}_8C_4 = 420$【通り】

点 D を通るような最短経路の総数は ${}_8C_4 \times {}_4C_2 = 420$【通り】

点 C，D をともに通るような最短経路の総数は

$${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 216 \text{【通り】}$$

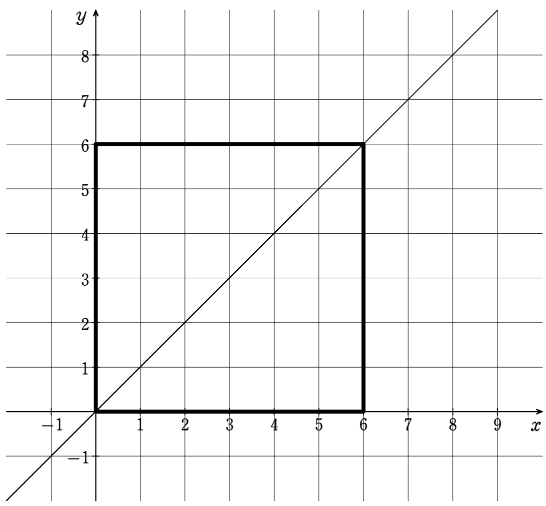
ゆえに，点 C，D のうち少なくとも一方を通るような最短経路の総数は

$$420 + 420 - 216 = 624 \text{【通り】}$$

したがって，点 C，D のどちらも通らない最短経路の総数は

$$924 - 624 = 300 \text{【通り】} \cdots \text{答}$$

(3)

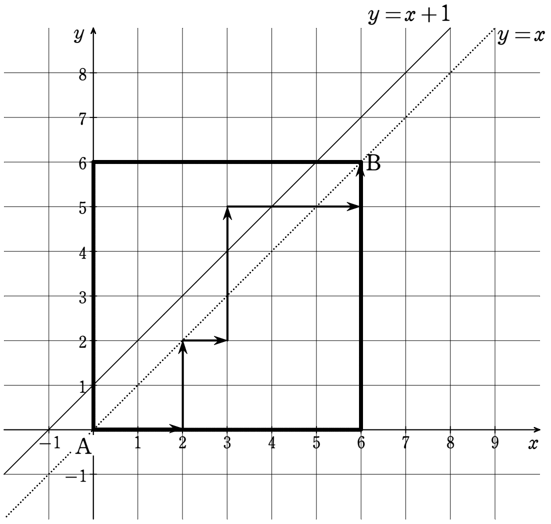


A $(0, 0)$ から B$(6, 6)$ まで，$y \leqq x$ の領域のみを通って行く最短経路の総数を求めればよい。

A $(0, 0)$ から B$(6, 6)$ までの行き方の総数は (1) より

$${}_{12}C_6 = 924 \text{【通り】}$$

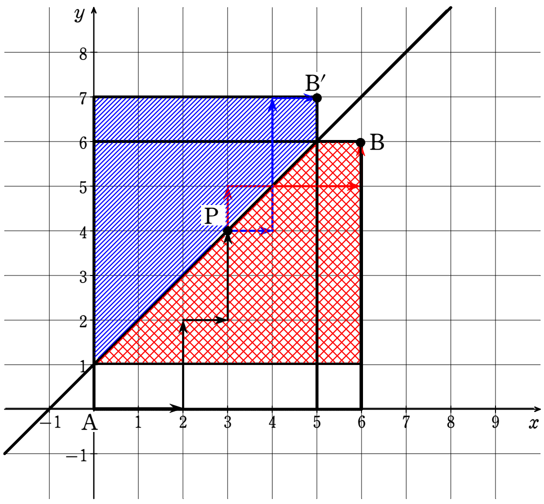
このうち，$y > x$ の領域を通る行き方の総数を除く。



(図 3)

$y>x$ の領域を通る経路は 少なくとも 1 回 $y=x+1$ と交点をもつ
（（図 3）参照）

このとき，最初に $y=x+1$ と交わる点を P とし，P 以降の経路を $y=x+1$ に関して対称になるように折り返す。（（図 4）参照）



(図 4)

これにより，A から B までの経路のうち，$y>x$ の領域を通過するような経路は

A から B′(5，7) までの最短経路と 1 対 1 に対応する。

よって，A から B までの経路のうち，$y>x$ の領域を通過するような経路は

$$ {}_{12}\mathrm{C}_5=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=792 \text{【通り】} $$

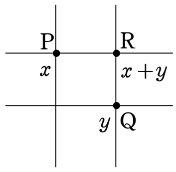
ゆえに，求める最短経路の数は

$$ 924-792=132 \text{【通り】} \cdots \text{答} $$

【戦略 2】(3)

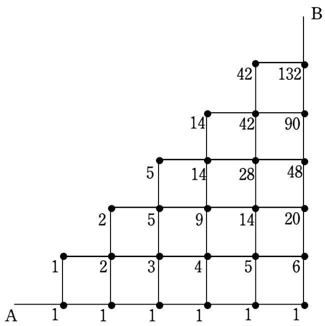
【戦略 1】の方針が思いつかなかった場合，愚直に経路を足し合わせるという腕力で押し切ることになります。

(3)



上の図において
点 A から 点 P，Q にいく最短経路の総数をそれぞれ x，y 通りとすると
点 R までの最短経路の総数は $x+y$ 通りとなる。

これに注意して A から B までの
最短経路を数え上げると次のようになる。



各 ● に添えられている数字は A からその点に行く最短経路の数を表す。

よって求める最短経路の数は 132【通り】… 答

【総括】

(1)，(2) まではきっちりと解ききりましょう。

(3) は

→ と ↑ を 6 個ずつ，計 12 個を並べ，左から k 番目までを見たときに
常に → の数が ↑ の数以上となっているような並べ方

ということから，「カタラン数の話題だな」と反応し，その対応について勉強をしていないと，初見では無理と言っていいと思います。

「カタラン数」については，多くの（ほとんどの）受験生にとっては知識で差がついてしまうため，対応しようと思ったらどんな話題なのかについては，最低限知っておく必要があります。

どこまで深入りするかも問題なのですが，代表的なものについて以下にまとめました。

【参考】

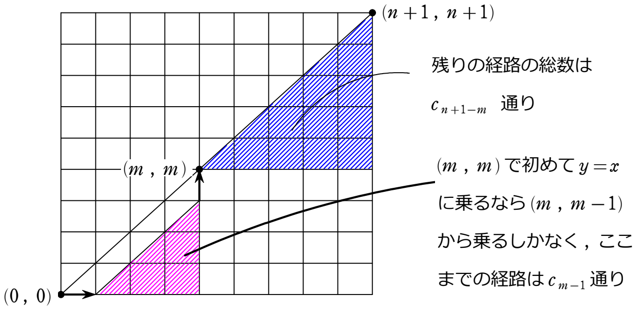
$c_n=\dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n\ (={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1})$ で与えられる数をカタラン数と言います。

これは $\begin{cases} c_0=1 \\ c_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \end{cases}$ という漸化式で与えられる解となります。

カタラン数は様々な形で登場します。

今回の問題はその一例で

①：$(0,\ 0)$ から $(n,\ n)$ まで，$y \leqq x$ の領域のみを通過していく最短経路の総数はカタラン数 c_n を用いて表現できます。



$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ として，

$(m,\ m)$ で初めて $y=x$ に乗って，その後 $(n+1,\ n+1)$ まで行く経路は $c_{m-1}\cdot c_{n+1-m}$ 【通り】で，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ として足し加えることで

$$\begin{aligned} c_{n+1}&=c_0c_n+c_1c_{n-1}+\cdots\cdots+c_nc_0 \\ &=\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \end{aligned}$$

を得ます。

実際にこの漸化式を解くことは難しく，c_n が欲しい場合は本問のように「場合の数としての意味付け」を与えて解くことになります。

この「場合の数としての意味付け」は本問のような最短経路問題だけでなく，

②：A，B と書かれたカードが n 枚ずつあり，それらを横一列に並べる。左から k 枚目までを見たときに，常に A と書かれたカードの枚数が B と書かれたカードの枚数以上となっているような並べ方は c_n 通り

Ex：$n=6$ としたときの例

A　A　B　A　B　A　B　B　A　B　A　B

※　これについては $n=6$ として A を →，B を ↑ として見ると本問や ① と同じです。

③：（ を n 個，）を n 個並べ替えて，「意味が通るような並べ方」は c_n 通り

Ex：$n=5$ のとき

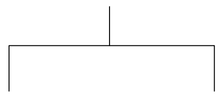
意味が通る並べ方：（（）（）（（））） ←【「」「」『「」』】と見ると分かりやすいですかね

意味が通らない並べ方：（（））)（））（（

※　これも ② において A を（，B を ）としてみると同じこととなる。

④：$n+1$ 人で組むトーナメントの総数は c_n 通り

$n+2$ 人で組むトーナメントの総数 c_{n+1} について考える。



$k+1$ 人のトーナメントは c_k 通り　　$n-k+1$ 人のトーナメントは c_{n-k} 通り

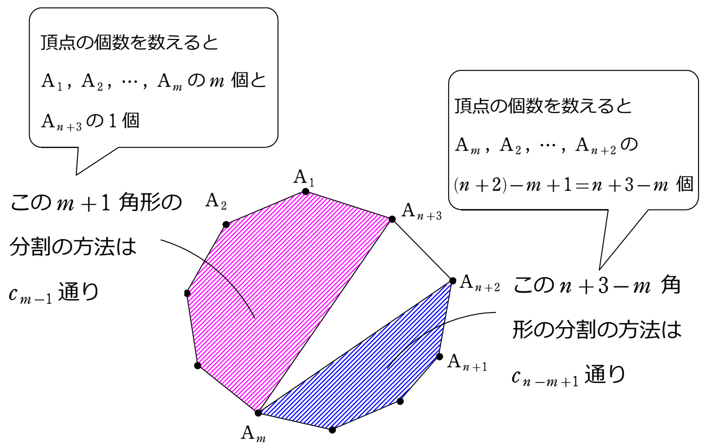
$\boxed{k+1\text{ 人}}$　　$\boxed{n-k+1\text{ 人}}$

よって，$c_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ が成立する。

⑤：凸 $n+2$ 角形 を $n-1$ 本の対角線によって三角形に分割する方法は c_n 通り

$n+3$ 個の頂点を $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_{n+1},\ \mathrm{A}_{n+2},\ \mathrm{A}_{n+3}$ とする。

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ とし，$\triangle \mathrm{A}_m\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{A}_{n+3}$ が分割された三角形の1つとしたとき，それによって $m+1$ 角形と，$n+3-m$ 角形に分かれ，それぞれの分割の方法は c_{m-1} 通り，c_{n-m+1} 通り



よって，
$$\begin{aligned} c_{n+1}&=\sum_{m=1}^{n+1} c_{m-1}c_{n-m+1} \\ &=c_0c_n+c_1c_{n-1}+\cdots+c_nc_0 \\ &=\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \end{aligned}$$

のような話題としても登場することがあります。