次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど１個あることを示せ。

(2) 自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく。t を $|t|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。
このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x\geqq\dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ のいずれかと等しいことであることを示せ。

< ’21 大阪大 >

【戦略】

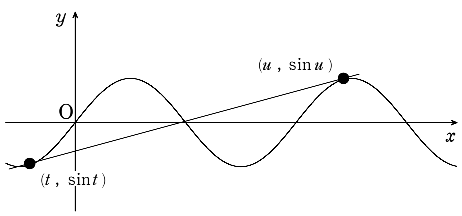
(1) $f(x)=x-\tan x$ **とおき，微分すれば単調減少であることが分かります。**

加えて任意の実数 a **に対して，題意が示されるためには**

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\infty\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=-\infty$$

と，$f(x)$ **の値域が実数全体であるということまで含めて示す必要があります。**

(2) **問題文で言われているシチュエーションは**



のようなイメージでしょう。

今回のような接線を複接線と言います。
(1 本の接線に対して接点が複数個あるような接線)

$(t\ ,\ \sin t)$ **で接線を引っ張ったときに**

「 この接線が複接線となる $\Longrightarrow t=x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$ **」**

ということと，逆に

「 $t=x_1,\ x_2,\ \cdots\ \Longrightarrow$ **この接線は複接線となる 」**

ということの，両方について確認しろということです。

今はフワッとした言い方にしましたが，これを数式的に表現していくことになります。

上の図で言えば，$(t\ ,\ \sin t)$**，**$(u\ ,\ \sin u)$ **における接線をそれぞれ立式し，それらが一致すると進めていけばよいでしょう。**

【解答】

(1) $f(x)=x-\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x)&=1-\frac{1}{\cos^2 x}\\ &=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}\\ &=\frac{(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0	↘	$-\infty$

ゆえに，$f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で値域が実数全体となる減少関数である。

これより，$f(x)=a$ を満たす x は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ１つ存在する。

(2) 点 $\mathrm{P}(t\ ,\ \sin t)\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=\sin x$ の接線 ℓ_t の方程式は

$y=\cos t\,(x-t)+\sin t$，でこれを整理すると

$$y=(\cos t)\,x-t\cos t+\sin t$$

一方，点 $\mathrm{Q}(u\ ,\ \sin u)\ \left(u\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=\sin x$ の接線 ℓ_u の方程式は

$$y=(\cos u)\,x-u\cos u+\sin u$$

曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t\ ,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x\geqq\dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するとは

$\ell_t,\ \ell_u$ が一致するような $u\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在するということであり

$$\begin{cases}\cos u=\cos t & \cdots ①\\ -u\cos u+\sin u=-t\cos t+\sin t & \cdots ②\end{cases}$$

を満たす $u\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在するということである。

つまり，示すべきは

① かつ ② を満たす $u\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在する

$\Longleftrightarrow$

t は $x_1,\ x_2,\ \cdots$ のいずれかと等しい

ということである。

＜ $\Longrightarrow$ の証明 ＞

① より，$u=t+2m\pi$，$-t+2m\pi$（m は整数）のいずれかである

$u=t+2m\pi$ とすると，② に代入して

$$-(t+2m\pi)\cos(t+2m\pi)+\sin(t+2m\pi)=-t\cos t+\sin t$$

$$(-t+2m\pi)\cos t+\sin t=-t\cos t+\sin t$$

$$2m\pi\cos t=0$$

$m=0$ とすると，$u=t$ となり，$u\geqq\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ を考えると不合理である。

ゆえに，$m\fallingdotseq 0$ で，$\cos t=0$ であるが，$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲でこれを満たす t は存在しないため，不適。

よって，$u=-t+2m\pi$ であり，このとき，② に代入して

$$-(-t+2m\pi)\cos(-t+2m\pi)+\sin(-t+2m\pi)=-t\cos t+\sin t$$

$$(t-2m\pi)\cos t-\sin t=-t\cos t+\sin t$$

$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\cos t<1$ なので，両辺 $\cos t$ で割ると

$$(t-2m\pi)-\tan t=-t+\tan t$$

これを整理すると，$t-\tan t=m\pi$ であり，数列 $\{x_n\}$ の定め方及び $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ から，$t=x_m$ を得る。

＜ $\Longleftarrow$ の証明 ＞

$t=x_m$（$m=1, 2, \cdots$）であるとする。$\left(-\dfrac{\pi}{2}<t\,(=x_m)<\dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき，$u=2m\pi-x_m$ と定めると，

$$\begin{aligned}\cos u&=\cos(2m\pi-x_m)\\&=\cos(-x_m)\\&=\cos x_m\ (=\cos t)\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}-u\cos u+\sin u&=(x_m-2m\pi)\cos(2m\pi-x_m)+\sin(2m\pi-x_m)\\&=(x_m-2m\pi)\cos x_m-\sin x_m\end{aligned}$$

ここで，x_m は $x_m-\tan x_m=m\pi$ を満たしているので

$x_m-\dfrac{\sin x_m}{\cos x_m}=m\pi$ であるため，

$$-u\cos u+\sin u=\left\{x_m-2\left(x_m-\frac{\sin x_m}{\cos x_m}\right)\right\}\cos x_m-\sin x_m$$

$$=\left\{-x_m+2\cdot\frac{\sin x_m}{\cos x_m}\right\}\cos x_m-\sin x_m$$

$$=-x_m\cos x_m+\sin x_m$$

$$=-t\cos t+\sin t$$

また，$u=2m\pi-x_m\geqq 2\cdot 1\cdot\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{2}\pi\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

これより，① かつ ② を満たす $u\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在する。

したがって，

① かつ ② を満たす $u\left(\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在する

$\Longleftrightarrow$

① かつ ② を満たす t は t は x_1，x_2，$\cdots$ のいずれかと等しい

ということが示されたので，題意は示された。

【総括】

(1) は微分の基本問題であるため，阪大受験生であれば落とせません。

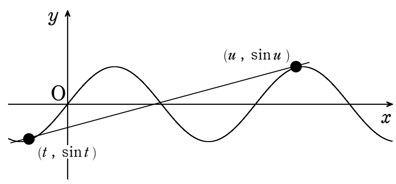
(2) は差が付くと思います。

何を示せばよいのかを見失わないことが山場で，その後は三角関数を自在に変形する運用力が求められます。

こういった論証では「使っていい条件（仮定）」と「示すべき結論」を整理しなければなりません。

分かっている人にとっては計算自体はほとんどないため，本問は標準的な内容なのですが，噛み砕く力が弱いと右往左往してしまうと思います。

この問題の題材は，



という構図を考えることでしょう。

それだけであれば，複接線であることを前提としてしまって

点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ $\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=\sin x$ の接線が
$\mathrm{Q}(u, \sin u)$ $\left(u\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ でも $y=\sin x$ に接しているとき
この t に対して $t-\tan t=n\pi$ を満たす整数 n が存在することを示せ。

点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ $\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=\sin x$ の接線が
$\mathrm{Q}(u, \sin u)$ $\left(u\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ でも $y=\sin x$ に接しているとき
この t に対して $\dfrac{t-\tan t}{\pi}$ の値は整数となることを示せ。

など，様々な「問いかけ方」があったと思います。

阪大が，このような「問いかけ方」にしたのは，必要性と十分性についてきちんと理解しているかを問いたいという思いの現れだと感じました。