整数 a , b , c に関する次の条件 $(*)$ を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots (*)$$

(1) 整数 a , b , c が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $c=3600$ のとき，$(*)$ および $a<b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ。

＜ '21 大阪大 ＞

【戦略】

(1) **素直に積分計算をすることで，a , b , c に関する等式を Get しにいきます。**

$a \neq b$ ，すなわち $a-b \neq 0$ という条件が効いてくることを意識しながら，$(a-b)$ という因数をもつことを身構えておきたいところです。

これにより，$3c^2=-(2a+b)(a+2b)$ という関係式を得ることになります。

$-(2a+b)(a+2b)$ が 9 の倍数だと言えれば，$c^2=(3$ の倍数$)$ ということになり，c も 3 の倍数であることが言えます。

$(2a+b)+(a+2b)=(3$ の倍数$)$ ということに注目すれば

$(2a+b,\ a+2b)\equiv(0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のいずれかですが，

$3c^2=-(2a+b)(a+2b)$ という関係式から，$2a+b$ ，$a+2b$ の少なくとも 1 つは 3 の倍数なので，$(2a+b,\ a+2b)\equiv(0,\ 0)$ しかあり得ず，$-(2a+b)(a+2b)$ が 9 の倍数となり，目標達成です。

(2)

$$\begin{aligned}(2a+b)(a+2b)&=-3\cdot 3600^2\\&=-2^8\cdot 3^5\cdot 5^4\end{aligned}$$

ということになり，これを満たす整数 a , b $(a<b)$ が何組あるかということになります。

因数の振り分け方によっては，a , b が整数として存在しないこともあるかもしれません。

(1) の途中経過から，$2a+b$ ，$a+2b$ はともに 3 の倍数であることが分かりますから，$2a+b$ ，$a+2b$ に少なくとも素因数 3 は 1 つずつ割り振られることになるでしょう。（これにより，a , b は整数として存在することになります。）

そこで，$\begin{cases}2a+b=3k\\a+2b=3\ell\end{cases}$ とおき，$3k\cdot 3\ell=-2^8\cdot 3^5\cdot 5^4$ ，すなわち

$k\ell=-2^8\cdot 3^3\cdot 5^4$ と見て，素因数の割り振り方を考えればよいと進めていきます。

$(k,\ \ell)$ の組の個数と，$(a,\ b)$ の組の個数は 1 対 1 に対応しますから $(a,\ b)$ の組の個数が欲しければ，$(k,\ \ell)$ の組の個数を求めればよいことになります。

解答では $(k,\ \ell)$ の組の個数と，$(a,\ b)$ の組の個数は 1 対 1 に対応するということをきちんと示していきたいと思います。

【解答】

(1) $(*)$ から $\left[\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2\right]_a^c=\left[\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{a}{2}x^2\right]_b^c$

すなわち，$\dfrac{1}{3}c^3+\dfrac{b}{2}c^2-\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{b}{2}a^2=\dfrac{1}{3}c^3+\dfrac{a}{2}c^2-\dfrac{1}{3}b^3-\dfrac{a}{2}b^2$

$$3bc^2-2a^3-3a^2b=3ac^2-2b^3-3ab^2$$

$$3c^2(a-b)+2(a^3-b^3)+3ab(a-b)=0$$

$$(a-b)\{3c^2+2(a^2+ab+b^2)+3ab\}=0$$

条件 $a \neq b$ より，$a-b \neq 0$ だから

$$3c^2+2(a^2+ab+b^2)+3ab=0$$

これより，$3c^2=-(2a+b)(a+2b)$ …① を得る。

まず，① より，$2a+b$ ，$a+2b$ の少なくとも一方は 3 の倍数 …②

また，$(2a+b)+(a+2b)=3(a+b)$（ $=3$ の倍数 ）より

$(2a+b,\ a+2b)\equiv(0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ (mod 3) であるが

② を考えると，$(2a+b,\ a+2b)\equiv(0,\ 0)$ (mod 3) しかあり得ない。

ゆえに，$2a+b$ ，$a+2b$ はともに 3 の倍数であり，

$\begin{cases}2a+b=3k\\a+2b=3\ell\end{cases}$ (k , ℓ は整数) …(☆) と表され，① より

$3c^2=-(3k)\cdot(3\ell)$ で，$c^2=-3k\ell$ となり，c^2 は 3 の倍数。

$c=3M\pm1$ (M は整数) と仮定すると，$c^2=3(3M^2\pm2M)+1$ となり c^2 が 3 の倍数とならず，矛盾する。

ゆえに，c は 3 の倍数である。

(2) (☆) より，$\begin{cases}a=2k-\ell\\b=2\ell-k\end{cases}$ …(★) で，

$$\begin{aligned}3k\ell&=-c^2\\&=-3600^2\\&=-(2^4\cdot 3^2\cdot 5^2)^2\end{aligned}$$

ゆえに，$k\ell=-2^8\cdot 3^3\cdot 5^4$

$a<b$ のとき，$2k-\ell<2\ell-k$ より，$k<\ell$

さらに，$k\ell<0$ であることも考えると，$k<0<\ell$

さて，$k=-\dfrac{2^8\cdot 3^3\cdot 5^4}{\ell}$ で，左辺は負の整数なので，右辺も負の整数。

ゆえに，ℓ は $2^8\cdot 3^3\cdot 5^4$ の正の約数であり，$9\cdot 4\cdot 5=180$ (通り) ある。

それに対応する k は ℓ の値に応じて決まる。

したがって，題意を満たすような $(k,\ \ell)$ の組は 180 通り

$(k\,,\ \ell)$ に応じて $(\bigstar)$ の関係式から $(a\,,\ b)$ が 1 組定まる。

逆に題意を満たす $(a\,,\ b)$ に応じて $(☆)$ の関係式から $(k\,,\ \ell)$ が 1 組定まる。

よって，題意を満たす $(a\,,\ b)$ に対して，それに対応する $(k\,,\ \ell)$ が存在する。… ③

また，

$$(k\,,\ \ell)=(k_1\,,\ \ell_1)\ \text{のときの}\ a\,,\ b\ \text{の組を}\ (a_1\,,\ b_1)$$
$$(k\,,\ \ell)=(k_2\,,\ \ell_2)\ \text{のときの}\ a\,,\ b\ \text{の組を}\ (a_2\,,\ b_2)$$

としたとき

$$(k_1,\ \ell_1)\fallingdotseq(k_2,\ \ell_2)\ \Longrightarrow\ (a_1,\ b_1)\fallingdotseq(a_2,\ b_2)\quad\text{である。}$$

なぜなら，$(a_1\,,\ b_1)=(a_2\,,\ b_2)$ と仮定すると $(\bigstar)$ から

$\begin{cases}2k_1-\ell_1=2k_2-\ell_2\\ 2\ell_1-k_1=2\ell_2-k_2\end{cases}$ で， これを $k_1,\ \ell_1$ の連立方程式とみなして

解くと

$$k_1=k_2,\ \ \ell_1=\ell_2$$

となり，$(k_1,\ \ell_1)\fallingdotseq(k_2,\ \ell_2)$ であることに矛盾する。

まとめると，

$$(k_1,\ \ell_1)\fallingdotseq(k_2,\ \ell_2)\ \Longrightarrow\ (a_1,\ b_1)\fallingdotseq(a_2,\ b_2)\ \cdots ④$$

③，④ より，$(a\,,\ b)$ の組と $(k\,,\ \ell)$ の組は 1 対 1 対応する。

以上から，求める $(a\,,\ b)$ の組は 180 (組) … 答

【総括】

(1) は約数の拾い上げ，余りで分類 という整数問題の基本的な態度で対応可能です。

(2) は $3c^2=-(2a+b)(a+2b)$ という関係式から

$$-(2a+b)(a+2b)=3\,(2^4\cdot3^2\cdot5^2)^2=2^8\cdot3^5\cdot5^4$$

と見て，約数を拾っていく際に，$2a+b$，$a+2b$ がそれぞれ 1 個ずつ素因数 3 をもつような割り振り方を考えることになり

$$-\ \underset{3\cdot2^A\cdot3^B\cdot5^C}{\boxed{(2a+b)}}\ \underset{3\cdot2^{8-A}\cdot3^{3-B}\cdot5^{4-C}}{\boxed{(a+2b)}}$$

というように分けられます。$\left(\begin{cases}A=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8\\ B=0,\ 1,\ 2,\ 3\\ C=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\ 4\end{cases}\right)$

このような A，B，C の決め方を考えれば，$(a\,,\ b)$ が 1 つに定まるので

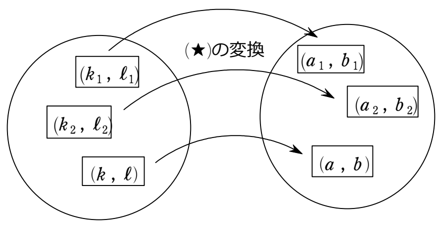
$$9\cdot4\cdot5=180\ 【組】$$

と考えても本質的には同じことです。
（$2^A\cdot3^B\cdot5^C$，$2^{8-A}\cdot3^{3-B}\cdot5^{4-C}$ の部分が解答中でいう k，ℓ です。）

解答中の ③，④ の議論は高校生では馴染みがない議論の進め方かもしれません。

$(a\,,\ b)$ の組と $(k\,,\ \ell)$ の組が「1 対 1 対応」することをどのように言うかですが

③ が言っていることは



というように，どんな $(a\,,\ b)$ をもってきても，それに対応する $(k\,,\ \ell)$ が存在するということです。

④ が言っていることは

右の図のように

$(\bigstar)$ の変換によって

ダブりが生じない

ということです。