# 2021年度 大阪大学 理系 第3問

$n$ を自然数とし，$t$ を $t \geqq 1$ をみたす実数とする。

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ。

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ。

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく。$\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 $p$，$q$ の値を求めよ。

＜ ’21 大阪大 ＞

**【戦略】**

(1) **手なりに差の関数を設定し，微分で示せばよいでしょう。**

(2) (1) **で示した不等式を辺々積分すれば，示すべき形が現れます。**

$a \leqq x \leqq b$ **において** $f(x) \leqq g(x)$ **が常に成立するとき**

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

**が成立するという基本事項です。**

(3) $t = 1+\frac{0}{n}$，$1+\frac{1}{n}$，$1+\frac{2}{n}$，……，$1+\frac{n-1}{n}$ **を代入して辺々を加えることを考えます。**

$t=1$ **として**

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n}\log 1 - \frac{1}{2n^2} \leqq 0$$

$t = 1+\frac{1}{n}$ **として**

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqq 0$$

$t = 1+\frac{2}{n}$ **として**

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{2}{n}}^{1+\frac{3}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} \leqq 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$t = 1+\frac{n-1}{n}$ **として**

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{1+\frac{n}{n}} \log x \, dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{n-1}{n}\right)} \leqq 0$$

**辺々加えると**

**こいつを出現させたかったわけです**

$$-\frac{1}{6n^3}\cdot n \leqq \int_1^2 \log x\,dx - \frac{1}{n}a_n - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

**これを整理すると**

$$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{n}a_n - (2\log 2 - 1) \leqq \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

**を得ます。**

**ここからの議論の進め方が問題です。**

**－－－－－－－－－－－－－以下は少々怖い議論－－－－－－－－－－－－－**

**辺々** $n$ **をかけ**

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq a_n - (2\log 2 - 1)n \leqq \frac{1}{6n} - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

**区分求積法により，** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

$$= \Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$= \log 2$$

**なので，はさみうちの原理から** $\lim_{n\to\infty}\{a_n - (2\log 2 - 1)n\} = -\frac{1}{2}\log 2$

**なので，** $p = 2\log 2 - 1$，$q = -\frac{1}{2}\log 2$

**－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－**

**ともっていくのは，議論的に少し怖いところがあります。**

**また，この見比べるという態度は** $p$，$q$ **を求めたというよりも，見つけたという感じが否めません。**

**「それ以外にない」ということをいうためにここでは**

$$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{n}a_n - (2\log 2 - 1) \leqq \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

**のまま考えていきます。**

**つまり，** $\lim_{n\to\infty}(a_n - pn)$ **を考えるにあたって，** $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}a_n - p\right)$ **と見たいと思います。**

**これにより，** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}a_n - p\right) = 0$ **となる必要が出てくるため，**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n$ **が求まれば，** $p$ **は先ほどの「見つかる」とは違い，「求まる」ことになります。**

【解答】

(1)　$f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$，

$g(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とする。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-x}{xt}$ で，$1\leqq t\leqq x$ のとき，$f'(x)\leqq 0$

ゆえに，$x\geqq t$ のとき $f(x)$ は単調減少で，$f(x)\leqq f(t)=0$ …①

一方，$g'(x)=f'(x)+(x-t)$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{t-x}{xt}-(t-x)\\
&=(t-x)\left(\frac{1}{xt}-1\right)\\
&=(t-x)\cdot\frac{1-xt}{xt}
\end{aligned}
$$

$1\leqq t\leqq x$ のとき，$g'(x)\geqq 0$ であり，$x\geqq t$ のとき $g(x)$ は単調増加。

よって，$g(x)\geqq g(t)=0$ …②

①，② より，$x\geqq t$ のとき

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

が成立する。

(2)　(1) の不等式より

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}}-\frac{(x-t)^2}{2}\,dx\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\log t\int_t^{t+\frac{1}{n}}dx-\frac{1}{t}\int_t^{t+\frac{1}{n}}(x-t)\,dx\leqq 0$$

$(最左辺)=-\dfrac{1}{6}\Big[(x-t)^3\Big]_t^{t+\frac{1}{n}}=-\dfrac{1}{6n^3}$

$$
\begin{aligned}
(真ん中の式)&=\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2t}\Big[(x-t)^2\Big]_t^{t+\frac{1}{n}}\\
&=\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2n^2t}
\end{aligned}
$$

よって，$-\dfrac{1}{6n^3}\leqq\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\dfrac{1}{n}\log t-\dfrac{1}{2tn^2}\leqq 0$ が成立する。

(3)　(2) の不等式において $t=1+\dfrac{k}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ をそれぞれ代入して辺々加えると

$$-\frac{1}{6n^3}\cdot n\leqq\int_1^2\log x\,dx-\frac{1}{n}a_n-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\leqq 0$$

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}}+\int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\int_{1+\frac{n-1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}=\int_1^2$$

これを整理すると

$$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\leqq\frac{1}{n}a_n-(2\log 2-1)\leqq\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\quad\cdots(*)$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\
&=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1\\
&=\log 2
\end{aligned}
$$

より，$n\to\infty$ のとき $\begin{cases}((*)の最左辺)\to 0\\ ((*)の最右辺)\to 0\end{cases}$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}a_n-(2\log 2-1)\right\}=0$

すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n=2\log 2-1$ …③

一方，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)$ が有限確定値となるとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)=0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n=p$ …④ となる必要がある。

**※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)\neq 0$ と仮定すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)$ が発散してしまい有限確定値とならない。**

③，④ より $p=2\log 2-1$ となる必要がある。

このとき，$(*)$ の両辺に $n$ をかけると

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\leqq a_n-pn\leqq\frac{1}{6n}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\quad\cdots(*)'$$

$n\to\infty$ のとき $\begin{cases}((*)'の最左辺)\to -\dfrac{1}{2}\log 2\\ ((*)'の最右辺)\to -\dfrac{1}{2}\log 2\end{cases}$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=-\frac{1}{2}\log 2$ となり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)$ は有限確定値 $-\dfrac{1}{2}\log 2$ に収束する。

以上から，$p=2\log 2-1$，$q=-\dfrac{1}{2}\log 2$ …答

【総括】

(1) は微分するだけなので，特に問題ないでしょうし，(2) も (1) の誘導を考えれば，無理のある設問ではないでしょう。

問題は (3) で，(2) の不等式を活用して

$$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{n}a_n-(2\log 2-1) \leqq \frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

ここから分母を払い

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq a_n-(2\log 2-1)n \leqq \frac{1}{6n}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\{a_n-(2\log 2-1)n\}=-\frac{1}{2}\log 2$

として，$\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ と比較するという方針は，論理に飛躍があります。

基本的に見比べて比較してよいかということについては，数学的には物議を醸すことになり，安易に比較することは避けた方が良いでしょう。

ただ，多くの人にとって試験場においてそこまで考えることが出来る余裕があるとは言えず，きちんと論じきるのは難しかったのではと思います。

今回求まった $\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ という結果は

数列 $\{a_n\}$ に対して，$(n,\ a_n)$ という点列をプロットしていったとき，
直線 $y=px+q$ に限りなく近づいていくということを意味します。

つまり，今回の $p$，$q$ を求めるということは漸近線を探すということになっていたわけです。