空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:1-s$ に内分する点を P，線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。

さらに 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=120^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle COA=60^\circ$，$\angle POQ=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。

< '21 大阪大 >

【戦略】

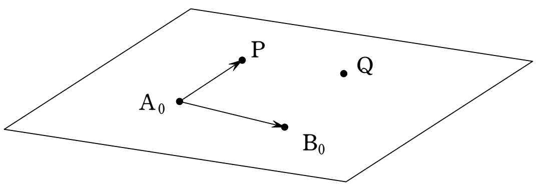
ベクトルの基本である

始点を揃えろ　基底で表せ

というセオリーに従い，始点を O に，基底を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ として考えます。($\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とします)

その他の登場人物 $\overrightarrow{OA_0}$，$\overrightarrow{OB_0}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表していきます。

(1) でのメインは A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあることの翻訳です。



3 点を同時に通らせる平面を設定することは可能なので，4 点目 (ここでは Q) がこの平面に乗っかるようにするためには何が言えればいいかを考えると

$$\overrightarrow{A_0Q}=u\,\overrightarrow{A_0P}+v\,\overrightarrow{A_0B_0}$$ **と表せればよい**

ということになります。

ざっくり言えば，この平面上で，$\overrightarrow{A_0P}$，$\overrightarrow{A_0B_0}$ という 2 つのボタンで UFO キャッチャーをすると思ってください。

この 2 本のボタンを u 秒間，v 秒間押した所に Q というぬいぐるみがあると思ってください。

逆に，そんな u，v が存在すれば，Q はこの平面上にある (この 2 つのボタンの UFO キャッチャーにおいてキャッチ可能なぬいぐるみ) ということになるでしょう。

(2) は，与えられた条件を，大きさや内積という基底の情報に変換して考えればよいだけです。

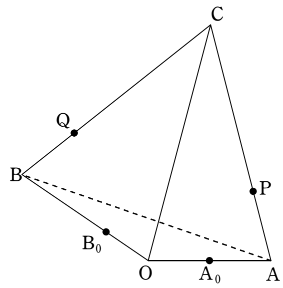
【解答】

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{OA_0}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OB_0}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$



(1) $$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0Q}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA_0}\\&=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=-\frac{1}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方，A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるので，
実数 u，v を用いて

$$\overrightarrow{A_0Q}=u\,\overrightarrow{A_0P}+v\,\overrightarrow{A_0B_0}$$

と表せる。

ゆえに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0Q}&=u\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_0}\right)+v\left(\overrightarrow{OB_0}-\overrightarrow{OA_0}\right)\\&=u\left\{\left((1-s)\vec{a}+s\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}\right\}-v\left\{\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right\}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)u-\frac{1}{2}v\right\}\vec{a}+\frac{1}{3}v\,\vec{b}+su\,\vec{c}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①，② から

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}-s\right)u-\dfrac{1}{2}v=-\dfrac{1}{2} & \cdots③\\ \dfrac{1}{3}v=1-t & \cdots④\\ su=t & \cdots⑤\end{cases}$$

③ より，$(2s-1)u+v=1\cdots③'$

④，⑤ より $v=3(1-t)$，$u=\dfrac{t}{s}$

これらを ③′ に代入し，$(2s-1)\cdot\dfrac{t}{s}+3(1-t)=1$

これを整理すると，$(s+1)t=2s$ を得て，$0<s<1$ なので

$$t=\frac{2s}{s+1}\cdots 答$$

(2)　条件より，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=-1$，　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，　$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=1$

さらに条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より

$$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}=0$$

上の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の大きさや内積の値に注意しながらこれを展開すると

$$(1-s)(1-t)\cdot(-1)+(1-s)t+st\cdot 4=0$$

これを整理して　$-1+2t+s+2st=0$

(1) より $t=\dfrac{2s}{s+1}$ であるから，　$-1+\dfrac{4s}{s+1}+s+\dfrac{4s^2}{s+1}=0$

分母を払って整理すれば，

$$5s^2+4s-1=0$$

$$(5s-1)(s+1)=0$$

$0<s<1$ であるため，$s=\dfrac{1}{5}$　…答

【総括】

難易度自体は今後教材に使用したいレベルの標準的な問題でした。

この手の問題を受験生に解かせてみると

律儀に図を書こうとして余計な時間を使っている

という人が多いです。

試験場では勇気がもてないかもしれませんが

正確な図よりも，分かりやすい図

の方が価値があります。

分かりやすい図を書いて，それを元に立式して解き進めていくわけです。

その結果，「あれ，計算の結果と自分が描いた図がリンクしないぞ」ということもあるやもしれません。

それは「あっ，自分が描いた図は実はダメで，実際はこういう図になるのか」

といったように，正しいシチュエーションを式が教えてくれていることになります。

まずは式を立てるためにも，分かりやすく状況を把握できる図を手際よく書いていきましょう。

誤解がないように言っておきますが，正確な図を疎かにしていいわけではありません。

私が言いたいのは

正確な図だろうが，ラフな図だろうが，立てる式は一緒

ということです。

正確な図を描くことに躍起になって時間を失うのはもったいないなと思います。