a，b を $ab<1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ に２本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$ とする。ただし，$s<t$ とする。

(1) s および t を a，b を用いて表せ。

(2) 点 $\mathrm{P}(a,b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$，$y>0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a，b の値を求めよ。

＜ ’21 大阪大 ＞

【戦略】

(1) **(a,b) から引いた接線を考えるので，一般に $\left(u,\dfrac{1}{u}\right)$ における接線の式を立てて，それが (a,b) を通るように仕組みます。**

これにより，u に関する２次方程式 $bu^2-2u+a=0$ を得ますが，

この２解が s，t ということになります。

(2) $\dfrac{t}{s}=\dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}$ **の最小値を考えます。**

一見２変数関数ですが，a，b は $b=\dfrac{9}{4}-3a^2$ を満たしながら動きますので，従属２変数です。

従属２変数の扱いとしては文字消去ができるときは文字消去を狙うのが普通なので，今回は手なりに文字消去をします。

$b=$ という形ですから普通に b を消去しますが，文字を消去する際の注意点として

遺産の整理

という言葉があります。

b は消えてしまいますが，生前もっている条件 $b>0$ であることから

$\dfrac{9}{4}-3a^2>0$ という条件を a に引き継がせないといけません。

これにより，ab が a の３次関数として得られることになります。

$\dfrac{t}{s}$ は「ab という塊」に依存することを考えれば，結局 $X=ab$

などとおくと，整理しやすくなるでしょう。

【解答】

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ について，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$u>0$ として，$\left(u,\dfrac{1}{u}\right)$ における接線の式は

$y=-\dfrac{1}{u^2}(x-u)+\dfrac{1}{u}$，すなわち $y=-\dfrac{1}{u^2}x+\dfrac{2}{u}$

これが $\mathrm{P}(a,b)$ を通るので，$b=-\dfrac{1}{u^2}a+\dfrac{2}{u}$

これを整理すると $bu^2-2u+a=0$ …①

これより，$u=\dfrac{1\pm\sqrt{1-ab}}{b}$ （$0<ab<1$ より実数解として存在）

① の２解が s，t であるため，$s<t$ であることを考えると

$$s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b}\ ,\quad t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}\ \cdots 答$$

(2) $\dfrac{t}{s}=\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{b}}{\dfrac{1-\sqrt{1-ab}}{b}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}$

$ab=X$ とおく。

今，$b=\dfrac{9}{4}-3a^2\ (a>0,\ b>0)$ を満たしている。

$b>0$ より，$\dfrac{9}{4}-3a^2>0$，すなわち $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a>0$ も考えると，$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}X&=ab\\&=a\left(\frac{9}{4}-3a^2\right)\\&=\frac{9}{4}a-3a^3\end{aligned}$$

$\dfrac{dX}{da}=\dfrac{9}{4}-9a^2$ で，

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{dX}{da}$		$+$	0	$-$	
X	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

これより，$0<X\leqq\dfrac{3}{4}$

$$\frac{t}{s}=\frac{1+\sqrt{1-X}}{1-\sqrt{1-X}}$$
$$=\frac{-(1-\sqrt{1-X})+2}{1-\sqrt{1-X}}$$
$$=\frac{2}{1-\sqrt{1-X}}-1$$

X が $0<X\leqq\frac{3}{4}$ で動くとき，$\frac{1}{4}\leqq 1-X<1$ なので，$\frac{1}{2}\leqq\sqrt{1-X}<1$

$0<1-\sqrt{1-X}\leqq\frac{1}{2}$ より，$\frac{2}{\frac{1}{2}}\leqq\frac{2}{1-\sqrt{1-X}}$

$$\frac{2}{1-\sqrt{1-X}}-1\geqq 3$$

等号成立は $X=\frac{3}{4}$ のときで，このとき先ほどの増減表から $a=\frac{1}{2}$

$ab=\frac{3}{4}$ なので，$b=\frac{3}{2}$

これより，$\frac{t}{s}$ は $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ のとき最小値 3 をとる。… 答

【総括】

2 変数関数の扱いについての基本的な問題でした。

細々とした注意点はありますが，大枠としてやるべきことが見えていてほしい問題です。

(1) で計算をミスしてしまうと，(2) も連動して失います。

$ab=X$ という塊と捉えることもさることながら，$\frac{t}{s}=\frac{1+\sqrt{1-X}}{1-\sqrt{1-X}}$ の扱いに関しても，そのまま微分したりするのは計算が膨らむことになります。

X を塊として見なすだけでなく，さらに $\sqrt{1-X}$ ごと塊と見れば

$\frac{1+□}{1-□}$ という分数関数ですから，仮分数から帯分数へ自然に直せるでしょう。

また，有理化すると，$\frac{(1+\sqrt{1-X})^2}{1-(1-X)}=\frac{(1+\sqrt{1-X})^2}{X}$ ということになり分母分子に変数が残ることを考えると，劇的に楽になる方針とは言い難い路線でしょう。