

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。
ただし, e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

< '21 東北大 >