以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n\,!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n\,!}e^x\,dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n\,!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left|\,e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)\right|<10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2<e<3$ であることは証明なしに用いてもよい。

＜ ’21 東北大 ＞

【戦略】

(1) **数学的帰納法という方針は選択したいところですが，それにあたって漸化式を作ることを考えます。**

積分漸化式の作成については部分積分を用いるのが常套手段です。

(2) **積分区間は文字の変域であり，それを用いて「体の一部を定数化」という態度で倒します。**

この体の一部を
積分区間によって
定数化します。

$$\frac{(a-x)^n}{n\,!}\ \boxed{e^0}\ \leqq\frac{(a-x)^n}{n\,!}\ \boxed{e^x}\ \leqq\frac{(a-x)^n}{n\,!}\ \boxed{e^a}$$

(3) (1) **において** $a=1$ **とし，**e **と** $1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n\,!}$ **との誤差にあたる** $\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\,dx$ **を** J_n **とおきます。**

(2) **でも** $a=1$ **とすれば**

$$\frac{1}{(n+1)!}\leqq J_n\leqq\frac{e}{(n+1)!}$$

が得られます。

$J_n>0$ **なので，**$\dfrac{e}{(n+1)!}$ **が大体** $\dfrac{1}{1000}$ **ぐらいになる** n **を探すと**

$n=6$ **あたりかなと分かります。（これは感覚的に探すニュアンスが強いでしょう。）**

$n=6$ **で** $J_6<\dfrac{1}{1000}$ **であることは分かりますから，あとは** $n=5$ **のときに** $J_5>\dfrac{1}{1000}$ **が確認できれば解決です。**

【解答】

(1) $\displaystyle I_n=\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n\,!}e^x\,dx$ とおく。

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^a\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}(e^x)'\,dx\\&=\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^a-\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n\,!}\cdot(-1)\,e^x\,dx\\&=-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+I_n\quad\cdots\text{①}\end{aligned}$$

$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n\,!}+I_n\ \cdots(*)$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^a(a-x)\,e^x\,dx\\&=\Big[(a-x)\,e^x\Big]_0^a-\int_0^a-e^x\,dx\\&=-a+\Big[e^x\Big]_0^a\\&=-a+e^a-1\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}e^a&=1+a+(-a+e^a-1)\\&=1+a+I_1\end{aligned}$$

ゆえに，$n=1$ のとき $(*)$ は成立する。

(ii) $n=k$ ($k=1,2,3,\cdots$) のとき

$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^k}{k\,!}+I_k$ と仮定する。

$I_{k+1}=-\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_k$ より，$I_k=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_{k+1}$

仮定より，
$$\begin{aligned}e^a&=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^k}{k\,!}+I_k\\&=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^k}{k\,!}+\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_{k+1}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する。

以上，(i)，(ii) より，$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n\,!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n\,!}e^x\,dx$$

が成立する。

(2)　積分区間 $0 \leqq x \leqq a$ において $\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^0 \leqq \dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x \leqq \dfrac{(a-x)^n}{n!}e^a$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^0\,dx \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^a\,dx$

$$\begin{aligned}(\text{最左辺}) &= \frac{1}{n!}\int_0^a (a-x)^n\,dx\\ &= \frac{1}{n!}\left[-\frac{1}{n+1}(a-x)^{n+1}\right]_0^a\\ &= -\frac{1}{(n+1)!}\{0-a^{n+1}\}\\ &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{最右辺}) &= \frac{e^a}{n!}\int_0^a (a-x)^n\,dx\\ &= \frac{e^a}{n!}\left[-\frac{1}{n+1}(a-x)^{n+1}\right]_0^a\\ &= \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

以上から，$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$ が成立する。

(3)　(1) の等式において $a=1$ とすると

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx$$

$J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx$　とおくと，

$J_n = e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ であり，$|J_n|<10^{-3}$ となる最小の自然数 n を求めればよい。

(2) の不等式において，$a=1$ とすると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq J_n \leqq \frac{e}{(n+1)!}$$

$n=5$ とすると $\dfrac{1}{1000} < \dfrac{1}{720} = \dfrac{1}{6!} \leqq J_5 \leqq \dfrac{e}{6!}$

$n=6$ とすると $\dfrac{1}{7!} \leqq J_6 \leqq \dfrac{e}{7!} < \dfrac{3}{7!} = \dfrac{1}{1680} < \dfrac{1}{1000}$

つまり，$J_6 < 10^{-3} < J_5$

(1) の ① において $a=1$ とすれば

$$J_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!}+J_n,\quad \text{すなわち}\quad J_{n+1}-J_n = -\frac{1}{(n+1)!}$$

ゆえに，$J_{n+1}-J_n<0$　となり，$J_n > J_{n+1}$

また，積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において $\dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x \geqq 0$ であり，等号は常には成立しないので，$J_n>0$

したがって，$J_1>J_2>J_3>J_4>J_5>10^{-3}>J_6>J_7>\cdots\cdots>0$

ゆえに，$|J_n|<10^{-3}$　を満たす最小の自然数 n は　$n=6$　… 答

【総括】

見る人が見たら，(1) が積分漸化式を作って帰納法で仕留めるという流れは定番の流れなのですが，方針からその場で考えているとこの路線にたどり着くまでに紆余曲折を経るかもしれません。

(2) は積分区間を用いて「体の一部を定数化」という言葉で一撃で沈みます。

(3) の (1)，(2) における $a=1$ のときを考えるという前問の活用法も，そこまで奇想天外なアイデアでもないでしょう。

e^x は

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

と無限級数表示（テイラー展開）されることは有名ですが，

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

と，途中で止めれば

$$e^x \geqq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

となります。

この誤差を埋めるのが，$\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt$ です。

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

と，等号で結ばれます。

本問において，この誤差に相当するするのが I_n であり，J_n です。
テイラー展開の剰余項と呼ばれます。
（受験生的には「ふ～ん」でいいですが，大学入学以降沢山目にするものになります。何が言いたいかと言うと，今回の I_n は天から降ってきたものではないよということです。）

この誤差 J_n が 10^{-3}（$=0.001$）以下となるような最初の n を見出してくださいというのが本問の趣旨です。

もちろん，本問にも登場する $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqq J_n \leqq \dfrac{e}{(n+1)!}$ という不等式，

及び，はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ と，この誤差は 0 に収束していくことになります。