z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点となるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

＜ '21 東北大 ＞

【戦略】

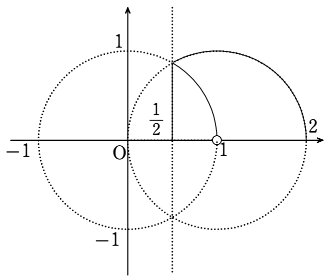
(1) **様々な言い方がありますが，分かりやすいのはベクトル的に捉えて**

$$z^2 = kz \quad (k \text{ は実数})$$

と 表せることが求める必要十分条件です。

(2) **素直に** OA＝OB，AO＝AB，BO＝BA **と場合分けをしてそれぞれ式的に翻訳します。**

(3) (2) **の図示が得られていれば，まず** z **が動き得る範囲が**



と分かります。

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \sin\left(\arg \frac{z^2 - 0}{z - 0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}|z||z|^2 \sin(\arg z)$$
$$= \frac{1}{2}|z|^3 \sin\theta$$

と，面積を式で表した際に何を見出すかが勝負です。

z **が動く曲線が一つではないのが厄介なところですが，**

θ **を固定した場合，**$|z|$ **が大きくなった方が面積が大きくなることに目をつけられればしめたもので，ここから** $|z-1|=1$ **上の** z **で考えればよいことが分かります。**

【解答】

(1) $z^2 = kz$ となる実数 k が存在することが求める必要十分条件。

$z=0$ のときは O，A，B が表す複素数は全て 0 となり，O，A，B は一つの直線上に乗っているとみなせる。

$z \neq 0$ のとき，$z=k$

以上から，求める必要十分条件は z が実数であること。… 答

(2) △OABが二等辺三角形であるためには，O，A，Bが異なる 3 点かつ，O，A，B が同一直線上にないということが必要。

よって，$\begin{cases} z \neq 0 \\ z^2 \neq 0 \\ z^2 \neq z \end{cases}$，すなわち $z \neq 0, 1$ …① かつ z は実数でない。

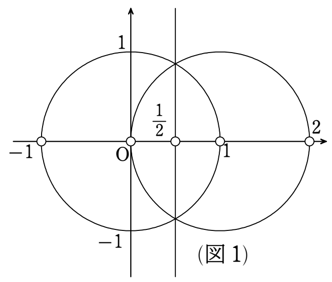
$\mathrm{OA} = |z|$，$\mathrm{AB} = |z^2 - z|\,(=|z||z-1|)$，$\mathrm{BO} = |z^2|\,(=|z|^2)$

(i) OA＝OBのとき $|z| = |z|^2$ で，① より $|z|=1$

(ii) AO＝ABのとき $|z| = |z||z-1|$ で，① より $|z-1|=1$

(iii) BO＝BA のとき $|z|^2 = |z||z-1|$ で，① より $|z| = |z-1|$

(i)，(ii)，(iii) から，△OABが二等辺三角形となる点 z 全体を複素数平面上に図示すると，以下の (図 1) のようになる。
(ただし，○ は除く)



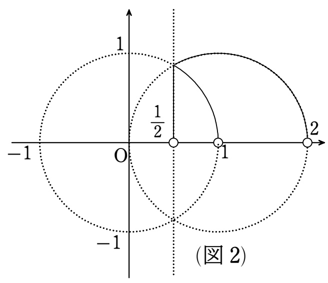
(図 1)

(3) 条件 $\arg z = \theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ より，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ (r>0)$$

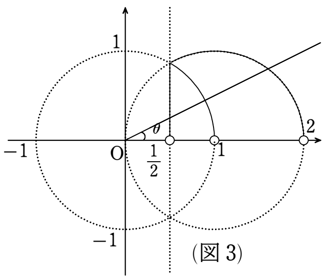
とおく。

(2) より z は以下の (図 2) の実線部を動き得る。



(図 2)

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \sin\left(\arg \frac{z^2 - 0}{z - 0}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |z| \cdot |z|^2 \cdot \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}|z|^3 \sin\theta \quad \cdots ②$$



(図 3)

ゆえに，(図 3) のように θ を固定したときの △OAB の面積は
$|z|^3$ の大きさに依存する。

よって，z が $|z-1|=1\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上を動くときを考えればよい

このとき，$|z|=2\cos\theta$ であるため，② から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\cdot 8\cos^3\theta\sin\theta\\&=4\cos^3\theta\sin\theta\end{aligned}$$

$f(\theta)=4\cos^3\theta\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=4\{\,3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta+\cos^3\theta\cos\theta\,\}\\&=4\{\,-3\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta\,\}\\&=4\cos^2\theta\,\{\,-3\sin^2\theta+\cos^2\theta\,\}\\&=4\cos^2\theta\,\{\,1-4\sin^2\theta\,\}\\&=4\cos^2\theta\,(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos^2\theta>0$，$1+2\sin\theta>0$ であるので

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

ゆえに，△OAB の面積の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ …答

このとき，$|z|=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ なので

$$\begin{aligned}z&=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$ …答

【総括】

(1) については 一般論

相異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について

A，B，C が同一直線上 $\Longleftrightarrow$ $\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\ \text{が実数}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を
イメージすると
分かりやすいです。

ということも押さえておくとよいでしょう。

※ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 ということから，さらに話を進めると

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$，すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$ で

$(\gamma-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})=(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)$ を得ますから，これを展開して
整理すると

$$\begin{aligned}&\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha\\\Longleftrightarrow\quad&\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}=\overline{\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}}\end{aligned}$$

となります。

これより，A，B，C が同一直線上 $\Longleftrightarrow$ $\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}$ が実数

ということも言えます。（実践的かどうかはおいといて）

(3) は感覚的に $|z-1|=1$ 上の z で考えれば良さそうということは分かるかもしれませんが，それをどうやって説明しようかという点で難しさを感じるかもしれません。