座標平面において，次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ を考える。

$(*)$ ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y=x^3-2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さい方から順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a\,,\ a^3-2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

＜ ’21 東北大 ＞

【戦略】

(1) **まずは，P，Q の座標を出そうということで，直線 ℓ の式と $y=x^3-2x$ を連立することを考えます。**

直線 ℓ と $y=x^3-2x$ の共有点 P，Q，R のうち与えられている R の座標を手掛かりに

ℓ は傾きが 1 で $(a\,,\ a^3-2a)$ を通る直線

と捉えて，$y=x+a^3-3a$ を導出します。

連立した 3 次方程式の解の中に $x=a$ が紛れ込むのは当然と考えて $x-a$ を因数にもつことを身構えながら式変形していきます。

$(x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$ と得られるはずなので，P，Q の x 座標は $x^2+ax+a^2-3=0$ 側から得られることになります。

求めたい中点は $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-2\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3-2\beta)$ $(\alpha<\beta)$ とすると

$\mathrm{S}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-2\alpha-2\beta}{2}\right)$ で，α，β に関する対称式であることを考えれば，解と係数の関係で $\begin{cases}\alpha+\beta\\ \alpha\beta\end{cases}$ を経由して導出するのが自然だし，定番です。

(2) **$S(X\,,\ Y)$ とおき，X，Y の関係式を Get しにいく基本問題です。**

$x^2+ax+a^2-3=0$ が a より小さい異なる 2 実解をもつことから a には範囲が付くので，軌跡の範囲にも気を付けながら処理します。

(3) **線分の通過領域ということで一瞬身構えます。(一般に線分の通過領域は処理が大変になることが多いです。)**

今回は P が動く部分，S が動く部分が分かっていますし，線分 PS は直線 ℓ の一部ですから，直接 ℓ を動かして目で追い切れます。

交点や接点などの位置関係に注意しながら通過領域を図示さえできれば，あとは数Ⅱ範囲の積分計算です。

【解答】

(1) 直線 ℓ は，傾き 1 で，$\mathrm{R}(a\,,\ a^3-2a)$ を通ることから

$y=1\cdot(x-a)+a^3-2a$，すなわち $y=x+a^3-3a$

これと，$y=x^3-2x$ とを連立して y を消去すると

$$x^3-2x=x+a^3-3a$$

$$x^3-3x-a^3+3a=0$$

$$(x-a)(x^2+ax+a^2)-3(x-a)=0$$

$$(x-a)\{(x^2+ax+a^2)-3\}=0$$

$$(x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$$

$x=a$ は R の x 座標を与えるので，P，Q の x 座標は

$$x^2+ax+a^2-3=0 \ \cdots(*)$$

の 2 解である。

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-2\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta\,,\ \beta^3-2\beta)$ $(\alpha<\beta)$ とすると

α，β は $(*)$ の異なる 2 つの実数解であるので，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=a^2-3\end{cases}$$

$\mathrm{S}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-2\alpha-2\beta}{2}\right)$ について考える。

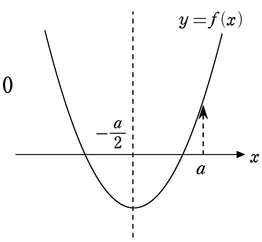
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3+\beta^3-2\alpha-2\beta}{2}&=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta)}{2}\\&=\frac{(-a)^3-3(a^2-3)(-a)-2(-a)}{2}\\&=\frac{2a^3-7a}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{S}\left(-\dfrac{a}{2}\,,\ \dfrac{2a^3-7a}{2}\right)$ … 答

(2) $(*)$ は a より小さい 2 つの実数解をもつので，$f(x)=x^2+ax+a^2-3$ とおくと

$$\begin{cases}\text{軸について}\ \ -\dfrac{a}{2}<a\\ \text{判別式について}\ \ a^2-4(a^2-3)>0\\ f(a)>0 \iff 3a^2-3>0\end{cases}$$



$$\iff \begin{cases}a>0\\ -2<a<2\\ a<-1,\ 1<a\end{cases}$$

これより，$1<a<2$ となる。

S(X, Y) とおく。

$$\begin{cases} X=-\dfrac{a}{2} & \cdots ① \\ Y=\dfrac{2a^3-7a}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$a=-2X$ $\cdots$ ③

③ を ② に代入して

$$Y=\frac{2(-2X)^3-7\cdot(-2X)}{2}$$
$$=-8X^3+7X$$

また，$1<a<2$，及び ③ から $1<-2X<2$，すなわち $-1<X<-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，求める点 S の軌跡は

$$y=-8x^3+7x \text{ の } -1<x<-\frac{1}{2} \text{ の部分} \cdots 答$$

(3) $f(x)=x^3-2x$，$g(x)=-8x^3+7x$ とおく。

(2) の途中経過の (*) の判別式の計算結果から，ℓ が $y=f(x)$ と接するとき，$a=\pm 2$ で，このときこの 2 接線は $y=x+2$，$y=x-2$

また，$y=f(x)$，$y=g(x)$ の交点については $f(x)=g(x)$ を考えると

$$x^3-2x=-8x^3+7x$$

$$9x^3-9x=0$$

$$x^3-x=0$$

$$x(x+1)(x-1)=0$$

よって，$y=f(x)$，$y=g(x)$ の交点は $(-1, 1)$，$(0, 0)$，$(1, -1)$

$y=x-2$ と $y=f(x)$ の交点については $f(x)=x-2$ を考えると

$$x^3-2x=x-2$$

$$x^3-3x+2=0$$

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

で，$(1, -1)$（これは接点となる），$(-2, -4)$

$y=x-2$ と $y=g(x)$ の交点については $g(x)=x-2$ を考えると

$$-8x^3+7x=x-2$$

$$4x^3-3x-1=0$$

$$(2x+1)^2(x-1)=0$$

で，$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$（これは接点となる），$(1, -1)$

$y=x+2$ と $y=f(x)$ の交点については $f(x)=x+2$ を考えると

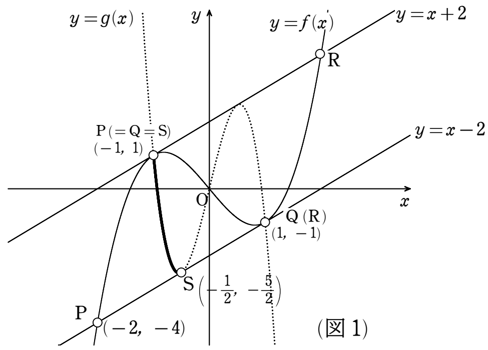
$$x^3-2x=x+2$$

$$x^3-3x-2=0$$

$$(x+1)^2(x-2)=0$$

で，$(-1, 1)$（これは接点となる），$(2, 4)$

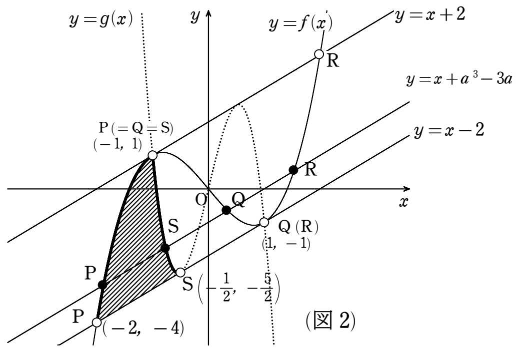
以上の位置関係に注意しながら，
$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=x-2$，$y=x+2$ のグラフをかくと
以下の (図 1) のようになる。(太線部が (2) の S の軌跡)



(図 1)

点 P が $y=f(x)$ の $-2<x<-1$ の部分を動く。
点 S が $y=g(x)$ の $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ の部分を動く。
線分 PS は直線 $y=x+a^3-3a$ の一部であり，傾き 1 を保ちながら動く。

以上のことを考えて，a を動かすと，線分 PS の通過領域は
以下の (図 2) の斜線部となる。



(図 2)

求める面積 を T とすると

$$T=\int_{-2}^{-1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}\,dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\{(-8x^3+7x)-(x-2)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{27}{8} \cdots 答$$

【総括】

３次方程式，３次関数，軌跡，面積，と総合的な力が問われます。

最後の線分 PS の通過領域については端点が乗っている曲線を Get 出来ている状態で，傾きが一定のまま動くので今回は目で追うことができます。

ちなみに，S が線分 PQ の中点であることから，$y=x^3-2x$ と $y=x-2$ で囲まれた図形の面積の半分と考えて，

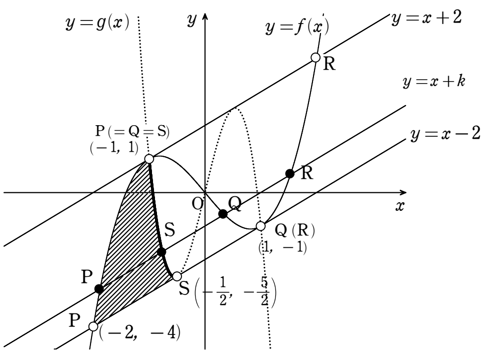
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x-1)^3+3(x-1)^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}\\ &= \frac{1}{2}\left\{0-\left(\frac{81}{4}-27\right)\right\}\\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx$

$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

を利用するのも有名路線です。

と出すことも出来ますが，なぜ半分でよいのかについては説明をつけるべきでしょうし，それをする労力があるなら，試験場ではゴリゴリ計算すればいいかと思います。

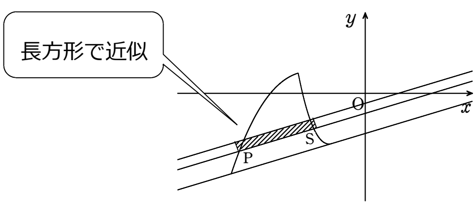


（なぜ半分でよいのかの簡単な説明）

一旦 a のことは忘れて，題意の領域を，直線 $y=x+k\ (-2\leqq k\leqq 2)$ で切ったときの切り口の長さ PS について考えます。

題意の領域のうち，$y=x-2$，$y=x+k$ で囲まれた部分の面積を $T(k)$ とします。

$\varDelta k$ が十分小さいとき，$T(k+\varDelta k)-T(k)=\mathrm{PS}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\varDelta k$ と近似できます。



ゆえに，$\displaystyle\lim_{\varDelta k\to 0}\frac{T(k+\varDelta k)-T(k)}{\varDelta k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PS}$

つまり，$T'(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PS}$ ということになり，題意の面積 T は

$$\begin{aligned}T&=T(2)-T(-2)\\ &=\Big[T(k)\Big]_{-2}^{2}\\ &=\int_{-2}^{2}T'(k)\,dk\\ &=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PS}\,dk\end{aligned}$$

同様に考えると，線分 SQ の通過領域の面積 U について

$$\begin{aligned}U&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{SQ}\,dk\\ &=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PS}\,dk\\ &=T\end{aligned}$$

となり，$U=T$ が得られます。