正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ。

　(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

＜ '21 東北大 ＞

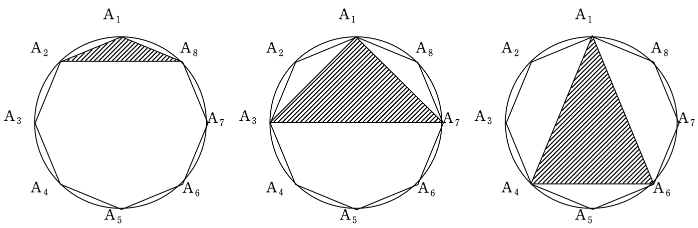
【戦略 1】

(1) **定番の問題で直径に対して，残りの 1 点の決め方を考えます。**

(2) **直角三角形は (1) より 24 個あります。**

そこで二等辺三角形の個数を数えます。

1 つの頂点を固定すると，(ここでは A_1 を固定します)



と二等辺三角形となるような残り 2 点の決め方は 3 通りあります。

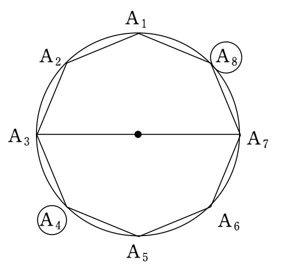
したがって，二等辺三角形は $8\times3=24$ 【個】あります。

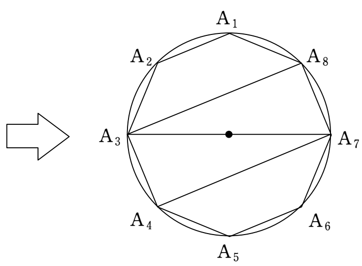
重複するものとしては，直角二等辺三角形があり，1 つの頂点を固定したときに直角二等辺三角形となるような残り 2 点の決め方は 1 通りですから，直角二等辺三角形は $8\times1=8$ 【個】です。

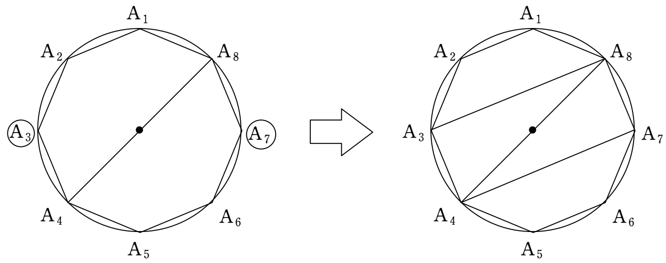
(3) **四角形の 4 頂点のうち 2 点を結んで直径になっているものがあれば (*) を満たします。**

そこで，$\begin{cases}\text{四角形の辺の中に直径がある}\\\text{四角形の対角線の中に直径がある}\end{cases}$ という 2 ケースに分けて考えます。

このうち，対角線の中に直径があるというケースは



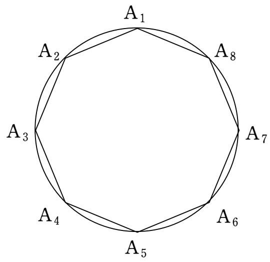




というように重複が発生します。この重複は，4 本の直径から 2 本を選んだ ${}_4C_2\,(=6)$ 通りありますので，それを除いて考えます。

【解 1】

(1) この正八角形の外接円を C とする。



この正八角形の頂点を結んでできる C の直径は 4 本ある。

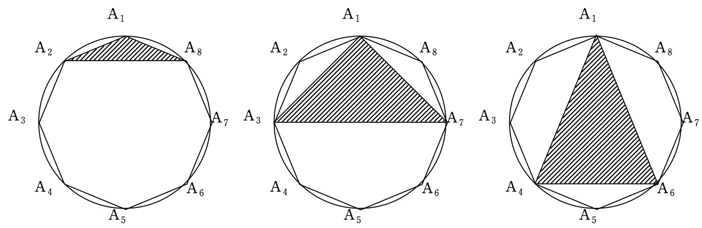
直径を 1 本決めると，まず 2 点が決定する。

その直径 1 本に対して，残りの頂点の選び方は 6 通りある。

ゆえに，直角三角形は $4\times6=24$ 【個】… 答

(2) 二等辺三角形の個数を求める。

1 つの頂点を固定すると，(下の図では A_1 を固定した図を考える)



と二等辺三角形となるような残り 2 点の決め方は 3 通りある。

したがって，二等辺三角形は $8\times3=24$ 【個】ある。

直角二等辺三角形は，頂点を 1 つ固定すると，それに対応する直角二等辺三角形は 1 個あるので，8 個ある。

(1) より，直角三角形は 24 個ある。

ゆえに，直角三角形 または 二等辺三角形となる頂点の選び方は

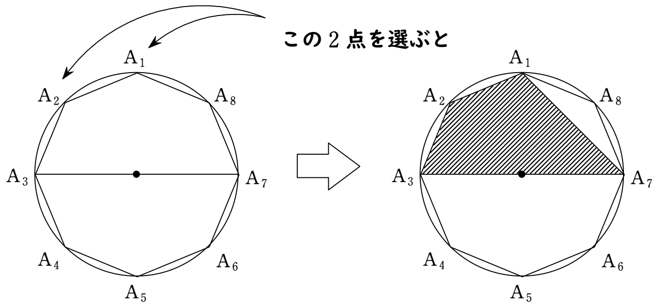
$$24+24-8=40 \text{ 【通り】}$$

三角形の作り方は全部で ${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 【通り】あるので
直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は

$$56-40=16 \text{【個】} \cdots \text{答}$$

(3) 選ばれた 4 個の頂点の中に，結んだときに C の直径となるような 2 点が含まれているとき，(*) を満たす。

(i) 四角形の辺の 1 つが C の直径となっているとき



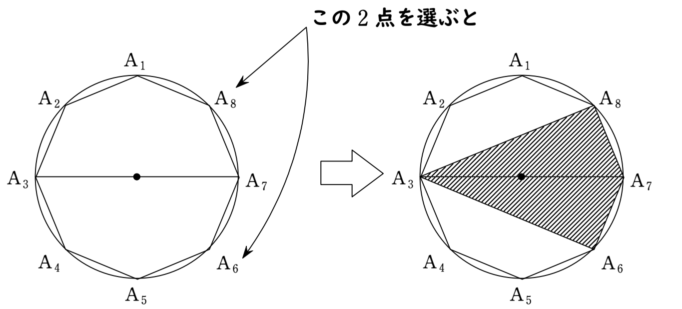
残り 2 点は，この直径で分けられる 2 つの弧のうち，同じ弧の上にある 3 点から 2 点選ぶことになる。

よって，直径を 1 つ決めたときの残り 2 点の選び方は

$${}_3\mathrm{C}_2\times 2=6 \text{【通り】}$$

ゆえに，$4\times 6=24$【通り】の決め方がある。

(ii) 四角形の対角線の 1 つが C の直径となっているとき



残り 2 点は，この直径で分けられる 2 つの弧のうち，異なる弧の上にある 3 点から 1 点ずつ選ぶことになる。

よって，直径を 1 つ決めたときの残り 2 点の選び方は

$${}_3\mathrm{C}_1\times {}_3\mathrm{C}_1=9 \text{【通り】}$$

ゆえに，$4\times 9=36$【通り】の決め方がある。

ただし，対角線が 2 本とも直径になる場合を除く必要があり，それは 4 本の直径から 2 本を選ぶ ${}_4\mathrm{C}_2=6$【通り】

これより，$36-6=30$【通り】

以上 (i)，(ii) より求める四角形の個数は $24+30=54$【個】… 答

【戦略 2】(2) について

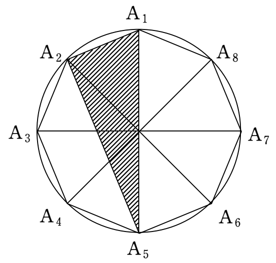
8 角形という具体的な場合において，できる三角形の種類は限られています。

下手なことを考えるより，三角形の種類を分類してそれぞれ求めた方が早いです。

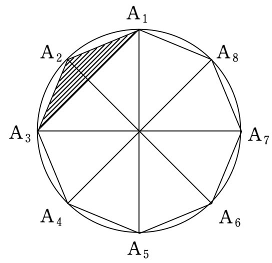
今回求めるものは一番求めにくい「名もなき三角形」です。

【解 1】同様，余事象的に考え，全体から引き算して考えます。

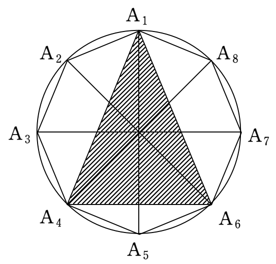
【解 2】(2) について



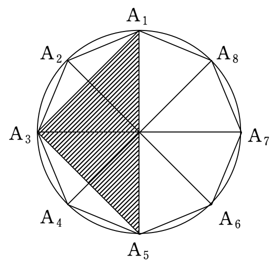
(図 1)



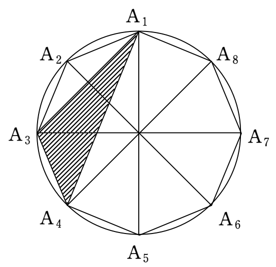
(図 2)



(図 3)



(図 4)



(図 5)

できる三角形の形の種類は上の 5 種類であり，このうち，(図 5) のタイプの三角形が何個あるかを数えればよい。

(図 1) のタイプ … 直径 1 本に対して，残り 1 点の決め方は 4 通り
$4\times 4=16$【個】

(図 2) のタイプ …1 つの頂点に対して，1 個作れるので 8 個

(図 3) のタイプ …1 つの頂点に対して，1 個作れるので 8 個

(図 4) のタイプ … 直径 1 本に対して，残り 1 点の決め方は 2 通り
$4\times 2=8$【個】

求める三角形の個数は，${}_8\mathrm{C}_3-(16+8+8+8)=16$【個】… 答

【総括】

正多角形の頂点で作られる三角形の数え上げというよくあるテーマなのですが，試験場でメンタルを揺さぶられると冷静さを失いかねないテーマです。

⑵ は普段の学習や演習であれば，包除原理

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

のように考える【解 1】路線で考えたいところです。

力業の【解 2】は試験場でのエスケープ路線ですが，緊張しているとこのエスケープさえ出てこなくなるかもしれません。

⑶ は見慣れない問われ方だと思います。結局何を数えたらよいのかを捉えることができるように，題意をかみ砕く力を鍛えておく必要があります。