a，b を $0<a<1$，$0<b<1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\dfrac{T}{S}$ を a，b で表せ。

(2) a，b が $0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p，q を 3 以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p}$，$b=\dfrac{1}{q}$ とする。$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

＜ '21 東北大 ＞

【戦略】

(1) **幾何的に処理することもできますが，一番明確なのは**

> **共通角を共有する 2 つの三角形について**
> **面積比＝辺積比**
> **が成り立つ**

を用いることでしょうか。

例えば，$\dfrac{\triangle\mathrm{APR}}{\triangle\mathrm{ABC}}$ という比を考えてみます。（ $\angle A$ を共有 ）

$$\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|\sin A}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

と面積の比は「辺の積の比」（私はダジャレで辺積比と呼んでいます）に読み替えることができ，条件から $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=a|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるため，即座に $\dfrac{\triangle\mathrm{APR}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{a}{2}$ と分かります。

残りの 2 つの角っこの $\dfrac{\triangle\mathrm{BQP}}{\triangle\mathrm{ABC}}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{CRQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}$ についても同様です。

(2) **a，b は独立 2 変数です。**

$\dfrac{T}{S}$ の式は (1) から $ab-\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$ となります。

ここでは，経験に基づく発想として「変数を 1 カ所に集める」という工夫をします。

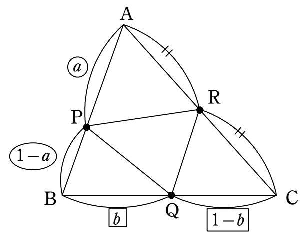
整数問題などでよく使う（実際 (3) でも使うのですが）変形で

$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ と見てやると，a，b がそれぞれ 1 カ所ずつで独立に動いていますので，この後は手なりに処理ができるでしょう。

(3) **(2) の誘導により，$\dfrac{S}{T}=3$ と特定できてしまいます。**

この後も約数の拾い上げによって処理する典型的な整数問題です。

【解 1】



(1)
$$\frac{\triangle\mathrm{APR}}{S}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|\sin A}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A}=\frac{a\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{a}{2}$$

$$\frac{\triangle\mathrm{BQP}}{S}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\sin B}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\sin B}=\frac{b\,|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cdot(1-a)\,|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=b\,(1-a)$$

$$\frac{\triangle\mathrm{CRQ}}{S}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CR}}||\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|\sin C}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\sin C}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cdot(1-b)\,|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}=\frac{1-b}{2}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}T&=S-(\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{BQP}+\triangle\mathrm{CRQ})\\&=S-\frac{a}{2}S-b\,(1-a)\,S-\frac{1-b}{2}S\\&=\left(ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right)S\end{aligned}$$

これより，$\dfrac{T}{S}=ab-\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$ … 答

(2) $\dfrac{T}{S}=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$

a，b は $0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を独立に動くので

$a-\dfrac{1}{2}$，$b-\dfrac{1}{2}$ は $-\dfrac{1}{2}<a-\dfrac{1}{2}<0$，$-\dfrac{1}{2}<b-\dfrac{1}{2}<0$ の範囲を独立に動く。

ゆえに，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)$ がとり得る値の範囲は

$$0<\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}$$

であり，辺々 $\dfrac{1}{4}$ を加えると

$$\frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

以上から，$\dfrac{T}{S}$ がとり得る値の範囲は $\dfrac{1}{4}<\dfrac{T}{S}<\dfrac{1}{2}$ … 答

(3)　p，q は 3 以上の整数であるという条件から

$$0<\frac{1}{p}\leqq\frac{1}{3}<\frac{1}{2}，0<\frac{1}{q}\leqq\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$$，すなわち $0<a<\frac{1}{2}$，$0<b<\frac{1}{2}$

(2) より，$\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}$ で，$2<\frac{S}{T}<4$ となる。

題意である $\frac{S}{T}$ が整数となるためには $\frac{S}{T}=3$ である必要がある。

今，

$$\begin{aligned}\frac{T}{S}&=\frac{1}{pq}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}\\&=\frac{pq-p-q+2}{2pq}\end{aligned}$$

なので，$\frac{S}{T}=\frac{2pq}{pq-p-q+2}$ となるため $\frac{2pq}{pq-p-q+2}=3$ を得る。

これを整理すると

$$pq-3p-3q+6=0$$

$$(p-3)(q-3)=3$$

$p-3\geqq0$，$q-3\geqq0$ であり

$(p-3，q-3)=(1，3)，(3，1)$，すなわち $(p，q)=(4，6)，(6，4)$

逆に $(p，q)$ がこれらの値となるとき $(a，b)=\left(\frac{1}{4}，\frac{1}{6}\right)，\left(\frac{1}{6}，\frac{1}{4}\right)$ となり，$\frac{S}{T}=3$ を得るため題意を満たす。

以上から，求める p，q の値の組は

$$(p，q)=(4，6)，(6，4)\ \cdots 圏$$

【戦略 2】(2) について

$\frac{T}{S}=ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$ を $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ と見れなかった場合ですが，愚直に 1 文字を固定して 1 文字ずつ動かすという「予選決勝法」によって処理すればよいでしょう。

【解 2】(2) の別解

$\frac{T}{S}$ の式について，まずは a を固定して b だけを動かす。

$\frac{T}{S}=\left(a-\frac{1}{2}\right)b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$（$=f(b)$ とおく）

$0<a<\frac{1}{2}$ より，$y=f(b)$ は by 平面で傾きが負の直線を表すため，

$0<b<\frac{1}{2}$ の範囲では $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(b)<f(0)$

予選通過者

すなわち，$\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\ \cdots$①

決勝戦

次に，固定していた a を $0<a<\frac{1}{2}$ で動かすと，$-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\cdots$②

①，② より，$\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}\ \cdots$圏

【総括】

非常に丁寧な誘導がついているため，段階的に無理なく処理ができるはずです。

【解 1】のように「変数を 1 カ所に集める」というのは有効な手段です。

この他にも，

$$x^2-4x+7=(x-2)^2+3$$（平方完成）

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\frac{3\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$（和積公式）

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$（合成）

$$\sum_{k=1}^{n}k\ {}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}n\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$（変数倍 → 定数倍）

など，数学の分野を問わず，散らばっている変数を 1 カ所に集めるということの大切さを感じてほしいのと同時に，各分野における「変数集約術」をきちんと身に着けておく必要があるでしょう。

本問の場合はそれが思いつかなかったとしても，1 文字ずつ動かしていくという予選決勝法という方針もあるので，何とか確保したいところでしょうが，それは外野からの意見で，当事者である受験生は試験場補正によってアタフタしかねません。

(2) が確保できたのであれば，(3) まで勢いに乗って完答したいですね。
(3) の難易度自体は整数問題としては極めて標準だと思います。