a，b を実数とする。曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。

＜ '21 東北大 ＞

【戦略】

問題文が 2 次関数のグラフの問題として書かれていますが，よく出てくるのは 2 次方程式の解の配置問題として登場するタイプの典型的な問題です。

方程式 $ax^2+bx+1=0$ が正の解をもたないような a，b の条件を求めて点 (a, b) の領域を図示せよ。

と同じことです。

むしろ，方程式としての問題もグラフ的に考えるので，今回の問題の方が素直かもしれません。

今回は $y=ax^2+bx+1$ が 2 次関数なのか 1 次関数なのか，定数関数なのかがはっきりしませんから，場合分けをしながら整理していきます。

ここでは 放物線なのか直線なのか，で分けて，放物線の場合も下に凸なのか上に凸なのかで分けていきます。

【解答】

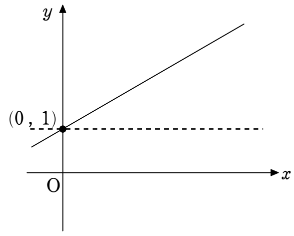
$f(x)=ax^2+bx+1$ とおく。

(i) $a=0$ のとき

$f(x)=bx+1$ であり，$y=f(x)$ は $(0, 1)$ を通る傾き b の直線

$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と共有点をもたないための条件は

$b \geqq 0$



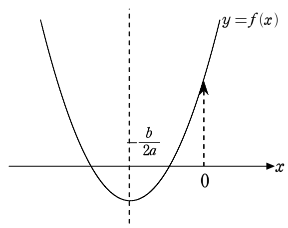
(ii) $a>0$ のとき

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+1$$

(ii−1) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$ のとき，すなわち $b \geqq 0$（ $a>0$ に注意）

このとき，$f(0)=1$（ >0 ）であり

$y=f(x)$ は x 軸正の部分と共有点をもつことはない。



(ii−2) $-\dfrac{b}{2a}>0$，すなわち $b<0$ のとき

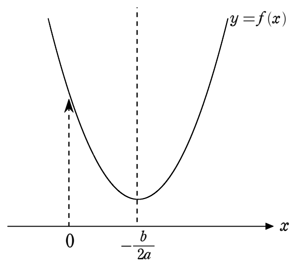
題意を満たすための条件は

$$-\frac{b^2}{4a}+1>0$$

$a>0$ に注意してこれを整理すると

$$a>\frac{b^2}{4}$$

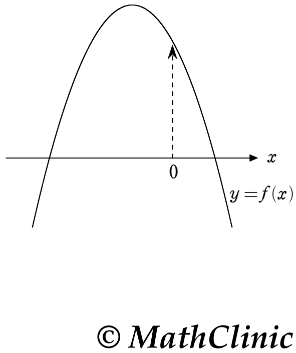
まとめると，$\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ a>\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$



(iii) $a<0$ のとき

$f(0)=1$（ >0 ）なので，

$y=f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもち，題意を満たさない。

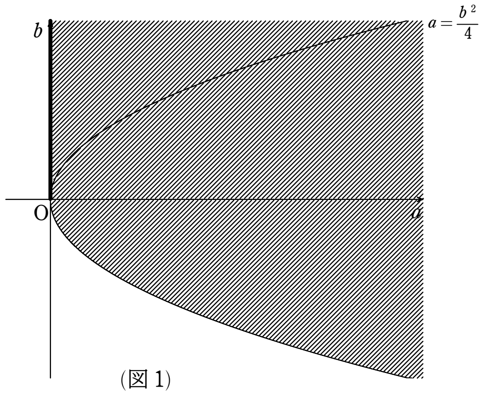


以上 (i) , (ii) , (iii) をまとめると , a , b が満たすべき条件は

$$\begin{cases} a=0 \\ b \geqq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a>0 \\ b \geqq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ a>\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$

これを図示すると , 以下の (図 1) の斜線部分となる。

境界線は $\begin{cases} a=0 \\ b \geqq 0 \end{cases}$ は含み , $\begin{cases} b<0 \\ a=\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$ は含まない。



(図 1)

【総括】

文字が 2 文字入っているものの , 処理自体はよくある解の配置問題であり , 東北大受験生としては落としたくない問題です。

最後の整理においては「かつ」「または」をきちんと意識しながらまとめていきたいところです。