$0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a\ ,\ \ a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2\,a_n\ \ (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots)$$

という漸化式で定める。ただし，$[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。
以下の問に答えよ。

(1) a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき，点 $(x\ ,\ y) = (a_1\ ,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) $a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3) $a_n > a_{n+1}$ ならば，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2\,a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ。

(4) ある 2 以上の自然数 k に対して，$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする。このとき，a_k を a の式で表せ。

＜ '21 名古屋大 ＞

【戦略】

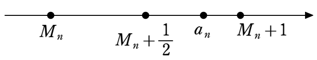
(1) $\left[a + \dfrac{1}{2}\right]$ **がどう外れるかですが，整数部分が切りあがるかどうかは**

$0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ **なのか** $\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ **なのかにかかってきます。**

場合分けをして丁寧に処理していきましょう。

(2) **見やすさ優先で** $[a_n] = M_n$ **とおくと，** $M_n \leqq a_n < M_n + 1$ **が言えます。**

与えられている条件は $a_n - M_n \geqq \dfrac{1}{2}$ **ということを意味するため**

数直線的には  **ということになります。**

$M_n + \dfrac{1}{2} \leqq a_n < M_n + 1$ **と挟めてしまえば，**

$M_n + 1 < a_n + \dfrac{1}{2} < M_n + \dfrac{3}{2}$ **から，** $\left[a_n + \dfrac{1}{2}\right] = M_n + 1$ **を得ます。**

あとは， $a_{n+1} - a_n$ **を計算すれば，手なりに** $a_{n+1} - a_n > 0$ **が示せると思います。**

(3) **(2) の対偶を考えたくなります。**

数直線などを駆使して整理していけば $a_{n+1} = 3[a_n] - 2\,a_n$ **の証明はそこまで難しくはないはずです。**

後半ですが，示すべきことは $M_n - 1 \leqq a_{n+1} < M_n$ **です。**

この示すべき不等式を整理すると $M_n < a_n \leqq M_n + \dfrac{1}{2}$ **です。**

これが証明できれば勝ちなのですが，(2) の対偶を考えることで得られる不等式が $M_n \leqq a_n < M_n + \dfrac{1}{2}$ **と等号に関して微妙に「痒い」状態です。**

そこで， $a_n = M_n$ **となるようなケースが除外できれば解決ですので背理法で** $a_n = M_n$ **となることはないということを目指します。**

(4) (3) **から** $\begin{cases} a_{n+1} = 3\,M_n - 2a_n \\ M_{n+1} = M_n - 1 \end{cases}$ **という漸化式が得られますから，**

こいつの処理ということになります。

気を付けたいのは， a_1, a_2, …… **に対する一般項** a_n **を求めるのではなく**

a_1, a_2, a_3, ……, a_k **という限られた範囲での一般項です。**

したがって，漸化式の「定義域」(n **に何をぶち込めるか) に注意しながら処理していくことになります。**

【解答】

(1) (i) $0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{1}{2} \leqq a + \dfrac{1}{2} < 1$ なので，$\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = 0$

$$\begin{aligned} a_2 &= 3\left[a + \frac{1}{2}\right] - 2a \\ &= -2a \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき $1 \leqq a + \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2}$ なので，$\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = 1$

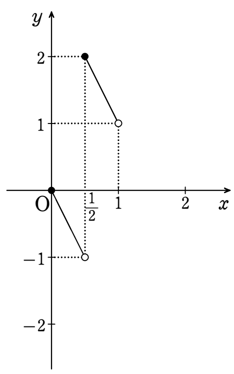
$$\begin{aligned} a_2 &= 3\left[a + \frac{1}{2}\right] - 2a \\ &= -2a + 3 \end{aligned}$$

(i), (ii) から，求める点 $(x\ ,\ y) = (a_1\ ,\ a_2)$ の軌跡が表す式は

$$y = \begin{cases} -2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\ \ のとき\right) \\ -2x + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\ \ のとき\right) \end{cases}$$

で与えられる。

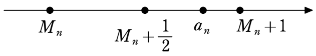
これを図示すると



© MathClinic

(2) $[a_n]=M_n$ とする。

条件 $a_n-[a_n]\geqq\dfrac{1}{2}$ ，すなわち $a_n-M_n\geqq\dfrac{1}{2}$ より



という大小関係となる。（ $M_n+\dfrac{1}{2}\leqq a_n<M_n+1$ …① ）

ゆえに，$M_n+1\leqq a_n+\dfrac{1}{2}<M_n+\dfrac{3}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=3\left[a_n+\frac{1}{2}\right]-2a_n\\&=3(M_n+1)-2a_n\\&=3M_n-2a_n+3\end{aligned}$$

ゆえに，$a_{n+1}-a_n=3(M_n-a_n+1)$

① の右側の不等式から $M_n-a_n+1>0$ を得る。

よって，$a_{n+1}-a_n>0$ となり，$a_n<a_{n+1}$ が成立する。

(3) (2) の対偶を考えると，$a_n\geqq a_{n+1}$ ならば $a_n-[a_n]<\dfrac{1}{2}$

一般に $[x]\leqq x$ であることも考えると

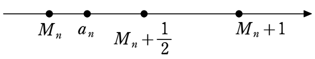
$a_n\geqq a_{n+1}$ ならば $0\leqq a_n-[a_n]<\dfrac{1}{2}$

今，条件 $a_n>a_{n+1}$ が成り立っているので，

$0\leqq a_n-[a_n]<\dfrac{1}{2}$（等号成立は a_n が整数のとき）…(☆)

である。

引き続き，$[a_n]=M_n$ とする。



a_n が整数と仮定すると，$a_n=M_n$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=3\left[M_n+\frac{1}{2}\right]-2M_n\\&=3M_n-2M_n\\&=M_n\\&=a_n\end{aligned}$$

となり，$a_n>a_{n+1}$ という条件に矛盾する。

ゆえに，a_n は整数とならず，(☆) の等号成立はあり得ず

$$0<a_n-M_n<\frac{1}{2}\cdots(★)$$

が成立する。

このとき，$M_n+\dfrac{1}{2}<a_n+\dfrac{1}{2}<M_n+1$ で，$\left[a_n+\dfrac{1}{2}\right]=M_n$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=3\left[a_n+\frac{1}{2}\right]-2a_n\\&=3M_n-2a_n\ \cdots②\\&=3[a_n]-2a_n\end{aligned}$$

一方，(★) より，$M_n<a_n<M_n+\dfrac{1}{2}$

辺々 -2 をかけると $-2M_n-1<-2a_n<-2M_n$

辺々 $3M_n$ を加えると，$M_n-1<3M_n-2a_n<M_n$

② より，$M_n-1<a_{n+1}<M_n$ を得て，$[a_{n+1}]=M_n-1$

すなわち $[a_{n+1}]=[a_n]-1$ である。

(4) $[a_1]=M_1$，$[a_2]=M_2$，……，$[a_k]=M_k$ とおく。($k=2，3，\cdots$)

$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_k$ が成立するとき，(3) から

$$\begin{cases}a_{n+1}=3M_n-2a_n & \cdots③\\ M_{n+1}=M_n-1 & \cdots④\end{cases}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1)$$

$$(a_1=a,\ a_2=-2a,\ M_1=0)$$

④ より，数列 $\{M_n\}$ は初項 0，公差 -1 の等差数列であり

$$\begin{aligned}M_n&=-(n-1)\\&=-n+1\end{aligned}$$

これが意味するのは，

$$M_1=0,\ M_2=-1,\ M_3=-2,\ \cdots\cdots,\ M_k=-k+1$$

③ に $M_n=-n+1$ を代入して整理すると

$$a_{n+1}=-2a_n-3n+3\ (n=1,2,3,\cdots,k-1)$$

これは $a_{n+1}+(n+1)-\dfrac{4}{3}=-2\left(a_n+n-\dfrac{4}{3}\right)$ と変形できる。

ゆえに，

$$\begin{aligned}a_n+n-\frac{4}{3}&=\left(a_1+1-\frac{4}{3}\right)(-2)^{n-1}\\&=\left(a-\frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}a_n&=\left(a-\frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}-n+\frac{4}{3}\\&=(-2)^{n-1}a-\frac{(-2)^{n-1}}{3}-n+\frac{4}{3}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ k)\end{aligned}$$

以上から，$a_k=(-2)^{k-1}a-\dfrac{(-2)^{k-1}}{3}-k+\dfrac{4}{3}$ …答

© MathClinic

【総括】

段階的に誘導をうまく活用しようという気持ちと，それに連動する基本事項をインスピレーション出来たかどうかが勝負の決め手でしょう。

適宜数直線などを織り交ぜたり，$[a_n]=M_n$ とおいたりするなど，見やすさと整理力を優先できれば，手が進んでいきやすくなります。

とは言え，その見かけに圧倒され，見ただけで捨ててしまった受験生も少なくないと思います。

難易度自体は標準と言いたいところですが，試験場の体感ではやや難に感じるかもしれません。

なお，最後の漸化式

$$a_{n+1}=-2a_n-3n+3\ (n=1,2,3,\cdots,k-1)$$

の処理は

$\begin{cases} a_{n+2}=-2a_{n+1}-3(n+1)+3 \\ a_{n+1}=-2a_n\quad -3n\qquad +3 \end{cases}$ として辺々を引く方針でも出来ますが

今回は番号をズラすことで漸化式の定義域が鬱陶しく感じたので，この路線ではなく，【解答】のようにうまく等比数列を作るやり方で処理しました。

<補足>

$a_{n+1}+\{p(n+1)+q\}=-2\{a_n+pn+q\}$ となるような p，q が見つかれば，$b_n=a_n+pn+q$ などとおくことにより，$b_{n+1}=-2b_n$ を得て等比数列の処理が出来ます。

$a_{n+1}+\{p(n+1)+q\}=-2\{a_n+pn+q\}$ を整理すると

$$a_{n+1}=-2a_n-3pn-p-3q$$

であり，これが $a_{n+1}=-2a_n-3n+3$ となっていればよいので

$\begin{cases} -3p=-3 \\ 3=-p-3q \end{cases}$ となっていればいいなぁと考えれば，$p=1$，$q=-\dfrac{4}{3}$

を得ます。

これにより，$a_{n+1}+(n+1)-\dfrac{4}{3}=-2\left(a_n+n-\dfrac{4}{3}\right)$ とうまく等比数列と見ることができます。

解答では「天下り的に」記述すればよいと思います。

© MathClinic