1から12までの数字が下の図のように並べて書かれている。以下のルール(a), (b)と(終了条件)を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると最初に(a)を行い，(終了条件)が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ(終了条件)が満たされるまで(b)の操作を繰り返す。ただし，(a)と(b)における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

(a) 1から12までの数字のどれか1つを等しい確率で選び，下の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く。

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか1つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。例えば，石が6の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字7，8，9，10，12のどれか1つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。

(終了条件) 5，9，11，12の数字のどれか1つが丸で囲まれ石が置かれている。

ゲームの終了時に数字jが丸で囲まれている確率をp_jとする。
以下の問に答えよ。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(1) 確率p_2を求めよ。
(2) 確率p_5とp_{11}を求めよ。
(3) 確率p_5，p_9，p_{11}，p_{12}のうち最も大きいものの値を求めよ。

< '21 名古屋大 >

【戦略】

(1) **数字2に丸がつけば，あとのことは知ったこっちゃありません。**

(2) (3) **結局このゲームは「数字が選べなくなったら終わり」です。**

基本的に「右に向かっていく」or「下に向かっていく」わけでゴール地点に「近い側」から計算していけば，順々に省エネしながら確率計算ができます。

【解答】

(1) 3以上の数字に丸がつくと，それ以降の操作において数字2に丸がつくことはない。

なので，$\begin{cases} \text{操作(a)で1が選ばれて，操作(b)で2を選ぶ} \\ \text{または} \\ \text{操作(a)で2が選ばれて，いずれ終了する} \end{cases}$

のいずれかが起こる確率がp_2である。

ゆえに，$p_2=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{21}$ …答

(2) < p_5について >

数字jと書かれている場所から，数字kと書かれている場所へ「途中経過は何であれ」移動することを，$j \Longrightarrow k$と表す。

また，数字jと書かれている場所から，次の操作で数字kと書かれている場所へ移動することを$j \to k$と表す。

例えば，$3 \Longrightarrow 9$ は $\begin{cases} 3\to4\to9 \\ 3\to8\to9 \end{cases}$ という2つの移動を内包している。

さて，まずは操作(a)で数字jが選ばれたとする。

【$j=5$のとき】この段階で，数字5に丸がつき，ゲームが終了する。

【$j=4$のとき】
$4 \Longrightarrow 5$ となる確率 … $4\to5$となる確率で$\dfrac{1}{2}$

【$j=3$のとき】
$3 \Longrightarrow 5$となる確率 … $\begin{cases} 3\to5 \\ 3\to4\to5 \end{cases}$ となる確率で $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

【$j=2$のとき】
$2 \Longrightarrow 5$ となる確率 … $\begin{cases} 2\to5 \\ 2\to4\to5 \\ 2\to3\Longrightarrow5 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

【$j=1$のとき】
$1 \Longrightarrow 5$となる確率 … $\begin{cases} 1\to5 \\ 1\to4\to5 \\ 1\to3\Longrightarrow5 \\ 1\to2\Longrightarrow5 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{35}$$

$j=1$，2，3，4，5となる確率はそれぞれ$\dfrac{1}{12}$であるため，求める確率p_5は

$$p_5=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{2}{35}\right)=\frac{8}{35} \cdots \text{答}$$

＜ p_{11} について＞

【 $j=11$ のとき】この段階で数字 11 に丸がつき，ゲームが終了する。

【 $j=7$ のとき】

$7 \Longrightarrow 11$ となる確率 … $7 \to 11$ となる確率で $\dfrac{1}{3}$

【 $j=10$ のとき】

$10 \Longrightarrow 11$ となる確率 … $10 \to 11$ となる確率で $\dfrac{1}{2}$

【 $j=6$ のとき】

$6 \Longrightarrow 11$ となる確率 … $\begin{cases} 6 \to 7 \to 11 \\ 6 \to 10 \to 11 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

【 $j=2$ のとき】

$2 \Longrightarrow 11$ となる確率 … $\begin{cases} 2 \to 11 \\ 2 \to 7 \to 11 \end{cases}$ となる確率で $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{15}$

【 $j=1$ のとき】

$1 \Longrightarrow 11$ となる確率 … $\begin{cases} 1 \to 2 \Longrightarrow 11 \\ 1 \to 10 \to 11 \\ 1 \to 6 \Longrightarrow 11 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{15}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$$

$j=11, 7, 10, 6, 2, 1$ となる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{12}$ であるため，

求める確率 p_{11} は

$$p_{11}=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}\right)=\frac{1}{5} \cdots 答$$

(3)　＜ p_{12} について＞

【 $j=12$ のとき】この段階で数字 12 に丸がつき，ゲームが終了する。

【 $j=10$ のとき】

$10 \Longrightarrow 12$ となる確率 … $10 \to 12$ となる確率で $\dfrac{1}{2}$

【 $j=6$ のとき】

$6 \Longrightarrow 12$ となる確率 … $\begin{cases} 6 \to 12 \\ 6 \to 10 \to 12 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

【 $j=1$ のとき】

$1 \Longrightarrow 12$ となる確率 … $\begin{cases} 1 \to 12 \\ 1 \to 10 \to 12 \\ 1 \to 6 \Longrightarrow 12 \end{cases}$ となる確率で

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{35}$$

$j=12, 10, 6, 1$ となる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{12}$ であるため，

$$p_{12}=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{9}{35}\right)=\frac{6}{35}$$

＜ p_9 について＞

このゲームにおいて，5，9，11，12 のうち 2 つ以上に丸がついていることはない。

つまり，数字 k に丸がついている事象を A_k とすると

A_5，A_9，A_{11}，A_{12} は排反な事象であり，どれかは必ず起こるため

$$p_5+p_9+p_{11}+p_{12}=1$$

$$\begin{aligned} p_9&=1-p_5-p_{11}-p_{12} \\ &=1-\frac{8}{35}-\frac{1}{5}-\frac{9}{35} \\ &=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$p_5\left(=\dfrac{8}{35}\right)$，$p_9\left(=\dfrac{14}{35}\right)$，$p_{11}\left(=\dfrac{7}{35}\right)$，$p_{12}\left(=\dfrac{6}{35}\right)$ のうち最も大きいものは

$$p_9=\frac{2}{5} \cdots 答$$

【総括】

ルールを把握するのに集中力が必要でしょう。

石にインクがついていると思えば，イメージとしては「スタンプ」を押していく感覚でしょうか。

本問は私が普段「その場力」と呼んでいる力を要する問題で，マニュアル的な態度でどうこうする問題ではありません。

手を動かしていくうちに，要領を掴んでいくと思います。

要領がつかめれば計算自体はできるかもしれませんが，その計算過程や考えを紙面上で抜かりなく説明することの方が難しいかもしれません。