4つの実数を $\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$，$\delta=\dfrac{3}{2}$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $\alpha\beta\gamma=1$ を示せ。

(2) α，β，γ，δ を小さい順に並べよ。

(3) $p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px+qx+1$ とする。このとき，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。

< '21 名古屋大 >

【戦略】

(1) **底の変換公式により，底を揃えていくだけです。**

(2) **まずは，明らかに γ は 1 より小さく，他は 1 より大きいです。**

したがって，γ が最小だと分かります。

δ という具体的な数については $\log$ の服を着せ変えが自由です。

例えば， $\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_2 2=\log_2 2^{\frac{3}{2}}$，$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_3 3=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$ **です。**

つまり， $\dfrac{3}{2}=\log_2\sqrt{8}$ **とも見れるし，** $\dfrac{3}{2}=\log_3\sqrt{27}$ **とも見れるわけです。**

$\alpha=\log_2\sqrt{9}$ **ですし，** $\beta=\log_3\sqrt{25}$ **ですから**

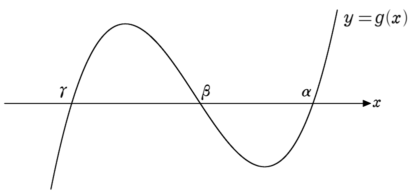
$\beta<\dfrac{3}{2}<\alpha$ **となり，解決でしょう。**

(3) **通分すれば** $q=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ **なのですが，** $\alpha\beta\gamma=1$ **ということから**

$q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ **となります。**

すると解と係数の関係から， α，β，γ **は** $x^3-px^2+qx-1=0$ **の解ということになります。**

$g(x)=x^3-px^2+qx-1$ **とおき，(2) の結果を基にして，**



という位置関係を得ます

$f(-K)=-K^3+pK^2-qK+1=-g(K)$ **です。**

$f(-K)$ **の符号が知りたかったら，** $g(K)$ **の符号が調べられれば解決ですから，そのあたりをグラフをもとに考えていきます。**

【解答】

(1) 底の変換公式から

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta\gamma&=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 5}\\
&=1
\end{aligned}
$$

となり，題意は示された。

(2) まず，$\log_5 2<\log_5 5=\log_3 3<\log_3 5$ なので，$\gamma<1<\beta$ …①

次に，$\log_3\sqrt{25}<\log_3\sqrt{27}$ なので，$\beta<\log_3 3^{\frac{3}{2}}\left(=\dfrac{3}{2}\right)$

一方，$\log_2\sqrt{8}<\log_2\sqrt{9}$ なので，$\left(\dfrac{3}{2}=\right)\log_2 2^{\frac{3}{2}}<\alpha$

ゆえに，$\beta<\dfrac{3}{2}<\alpha$ … ②

①，② より，α，β，γ，δ を小さい順に左から並べると，

γ，β，δ，α …答

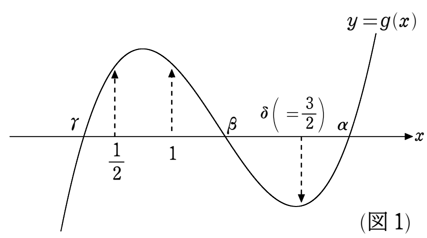
(3) $q=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$（∵ (1) より $\alpha\beta\gamma=1$）

ゆえに，α，β，γ は $x^3-px^2+qx-1=0$ の解である。

$g(x)=x^3-px^2+qx-1$ とおく。

ここで，$\log_5\sqrt{4}<\log_5\sqrt{5}$ より，$\gamma<\dfrac{1}{2}$ …③ を得る。

①，②，③ を考えると，(図 1) のようになる



(図 1)

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$g(1)>0$，$g\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ より，$\begin{cases}\dfrac{1}{8}-\dfrac{p}{4}+\dfrac{q}{2}-1>0\\ 1-p+q-1>0\\ \dfrac{27}{8}-\dfrac{9}{4}p+\dfrac{3}{2}q-1<0\end{cases}$ …(*)

(*) より，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{p}{4}-\frac{q}{2}+1<0$$

$$f(-1)=-1+p-q+1<0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}+\frac{9}{4}p-\frac{3}{2}q+1>0$$

© MathClinic

【総括】

(1)，(2) は教科書，及び傍用問題集レベルの問題です。

名古屋大学は遥か昔 (1975 年) に

$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ

という出題がありました。

$\log_3\sqrt{16} < \log_3\sqrt{27}$ より，$\log_3 4 < \dfrac{3}{2}$

$\log_2\sqrt{8} < \log_2\sqrt{9}$ より，$\dfrac{3}{2} < \log_2 3$

したがって，$\log_3 4 < \dfrac{3}{2} < \log_2 3$ となり，$\log_3 4 < \log_2 3$ を得ます。

つまり，$\dfrac{3}{2}$ という「繋ぎ数字」が隠されていたわけです。

それを思うと，今年の本問は $\dfrac{3}{2}$ を見せてくれているため幾分か親切です。

(3) についても (1)，(2) の誘導がじわじわと効いてくるため，無理がありません。

© MathClinic