a を正の実数とする。
放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする。
以下の問に答えよ。

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 ℓ, ℓ' を持つような a の範囲を求めよ。ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下，a は (2) で求めた範囲にあるとし，ℓ, ℓ' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする。

(3) ℓ, ℓ' の交点の座標を求めよ。

(4) C_1 と ℓ, ℓ' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする。D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5) $S(a)$ を (4) の通りとする。a が (2) で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

< '21 名古屋大 >

【戦略】

(1) **微分による接線公式でおしまいです。**

(2) **(1) の接線が C_2 にも接していることを言えばいいですね。**

そう考えると，(1) の直線の式と C_2 の式を連立して判別式という路線もあると思います。

あるいは，C_2 上の $(s,\ -s^2+4as-4a^2+4a^4)$ における接線の式を出して，(1) の直線と同じ直線となる

と，もう一回微分による接線公式を用いる方針もあるでしょう。

さらに，$y=mx+n$ として，
C_1 側と連立して判別式，C_2 側と連立して判別式
とすることもできます。

このように放物線同士の共通接線の扱いは，
「微分＆微分」「微分＆判別式」「判別式＆判別式」
のいずれかが考えられます。

煮るなり，焼くなり，刺身にするなりお好きに処理すればよいと思いますが，ここでは「微分＆微分」で処理します。

(3) **2 つの接点の x 座標を t_1, t_2 とすると，ℓ, ℓ' の式はそれぞれ $y=2t_1x-t_1{}^2$, $y=2t_2x-t_2{}^2$ となりますから，連立して解けば交点の座標が得られます。**

この t_1, t_2 は (2) の導出過程で現れる 2 次方程式の解なので，解と係数の関係を用いて a で表せば解決です。

(4) **定番の構図です。$\displaystyle\int_p^q (x+c)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x+c)^3\right]_p^q$ と「塊のまま」積分する工夫をしましょう。**

(5) **$S(a)=C\{\quad\}^{\frac{3}{2}}$ という形をしており，何も丸ごと微分せずとも中身が最大となれば $S(a)$ も最大となると捉え，省エネします。**

【解答】

(1) $f(x)=x^2$ とすると，$f'(x)=2x$

$(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は $y=2t(x-t)+t^2$

これを整理すれば，$y=2tx-t^2$ … 答

(2) $g(x)=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ とすると，$g'(x)=-2x+4a$

$(s,\ -s^2+4as-4a^2+4a^4)$ における C_2 の接線の方程式は

$y=(-2s+4a)(x-s)-s^2+4as-4a^2+4a^4$

これを整理すると $y=(-2s+4a)x+s^2-4a^2+4a^4$

これが，$y=2tx-t^2$ と一致するとき，

$\begin{cases} 2t=-2s+4a \\ -t^2=s^2-4a^2+4a^4 \end{cases}$ で，これを整理すると

$$\begin{cases} s=-t+2a & \cdots ① \\ s^2+t^2-4a^2+4a^4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① を② に代入すると

$(-t+2a)^2+t^2-4a^2+4a^4=0$ で，これを t について整理すると

$$t^2-2at+2a^4=0 \quad \cdots (*)$$

を得る。

$(*)$ が相異なる 2 つの実数解をもつときを考えればよく

$(*)$ の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}>0$ となればよい。

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-a)^2-2a^4\\&=a^2(1-2a^2)\end{aligned}$$

ゆえに，$a^2(1-2a^2)>0$ となればよい。

条件 $a>0$ から $a^2>0$ なので，$1-2a^2>0$ で $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

再び $a>0$ を考えれば，$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ … 答

(3) $(*)$ の異なる 2 つの実数解を t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ とする。

このとき，

$$\begin{aligned}\ell &: y=2t_1x-t_1{}^2\\ \ell' &: y=2t_2x-t_2{}^2\end{aligned}$$

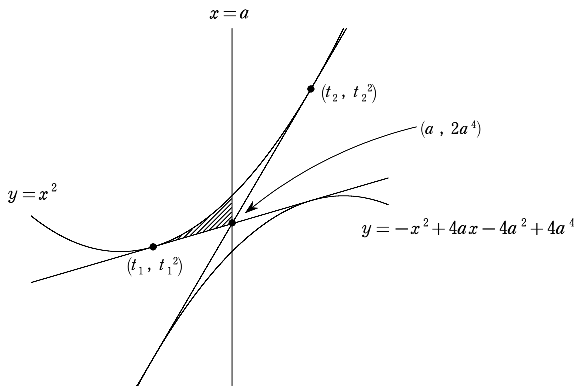
この 2 式を連立して解けば，$(x,\ y)=\left(\dfrac{t_1+t_2}{2},\ t_1t_2\right)$

ゆえに，ℓ, ℓ' の交点の座標は $\left(\dfrac{t_1+t_2}{2},\ t_1t_2\right)$

解と係数の関係から，$\begin{cases} t_1+t_2=2a \\ t_1t_2=2a^4 \end{cases}$ $\cdots$(☆) が成立する。

よって，ℓ，ℓ' の交点の座標は $(a,\ 2a^4)$ $\cdots$ 答

(4)



$$S(a)=\int_{t_1}^{a}\left\{x^2-(2t_1x-t_1^2)\right\}dx$$

$$=\int_{t_1}^{a}(x-t_1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-t_1)^3\right]_{t_1}^{a}$$

$$=\frac{1}{3}(a-t_1)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{t_1+t_2}{2}-t_1\right\}^3 \quad (\because\ (☆))$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{24}(t_2-t_1)^3$$

ここで，

$$\begin{aligned}(t_2-t_1)^2&=(t_2+t_1)^2-4t_1t_2\\&=(2a)^2-4\cdot 2a^4\\&=4(a^2-2a^4)\end{aligned}$$

よって，

$$S(a)=\frac{1}{24}\left\{(t_2-t_1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{24}\left\{4(a^2-2a^4)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(a^2-2a^4)^{\frac{3}{2}} \cdots 答$$

(4)　$a^2=A$ とおくと，$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$0<A<\dfrac{1}{2}$

$$S(a)=\frac{1}{3}(A-2A^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{-2\left(A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

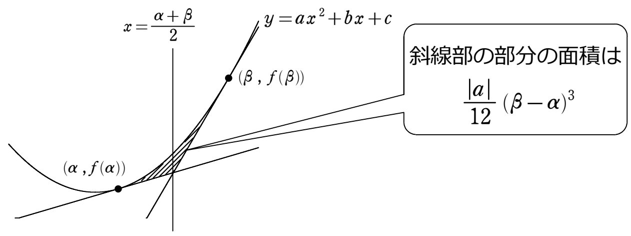
関数 $Y=X^{\frac{3}{2}}\ (=X\sqrt{X})$ は $X>0$ で定義され，定義される範囲の中では単調増加関数である。

ゆえに，$S(a)$ は $A=\dfrac{1}{4}$，すなわち $a=\dfrac{1}{2}$（$a>0$ を考慮）のとき最大となる。

求める最大値は
$$\begin{aligned}S\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8\sqrt{8}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{96} \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

共通接線の扱いはよく出てくる定番の話題ですし，



という構図もよく出てくる定番です。

今回は $S(a)$（左半分）について考えましたが，解答中の $\dfrac{1}{24}(t_2-t_1)^3$ という結果は勉強していれば当然だと思いたいところです。

各種計算上の工夫についても，初見だと確かに右往左往する人も出てくるでしょう。

ただ，名古屋大受験生レベルで初見である人は少ないと思いますので経験に基づく工夫として手際よく処理していきたいところです。

定番の話題であるだけに，この問題を落とすと痛いでしょう。