$a_1=2$，$b_1=1$ および

$$a_{n+1}=2a_n+3b_n,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。$c_n=a_nb_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ。

＜ '21 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **これについては計算するだけです。ミスだけに気をつけましょう。**

(2) **a_n が常に偶数なのか，b_n が常に偶数なのか，時と場合によってどっちが偶数か違うのか，それを調べるために実験してみると**

$$\begin{cases}a_1=2\\ b_1=1\end{cases},\ \begin{cases}a_2=7\\ b_2=4\end{cases},\ \begin{cases}a_3=26\\ b_3=15\end{cases},\ \begin{cases}a_4=97\\ b_4=56\end{cases},\ \cdots\cdots$$

と，n の偶奇によって偶奇が入れ替わっているようです。

つまり，a_n，b_n の偶奇が異なるということを言えばよく，

$$a_n+b_n=\text{奇数}$$

ということが言えれば解決です。

証明の手法はもちろん漸化式と相性の良い「数学的帰納法」です。

(3) **示すべきは，c_{2m} $(m=1,2,\cdots)$ が $\begin{cases}4\text{で割り切れる}\\ 7\text{で割り切れる}\end{cases}$ という 2 つが言えれば解決です。**

これも実験から，

b_2，b_4，$\cdots$ が 4 の倍数となっている

ということが予想されます。

7 の倍数であるということについては $\{a_n\}$ 側と $\{b_n\}$ 側で入れ替わっていますから，相手にすべきは $\{c_n\}$ についての漸化式でしょう。

ここも帰納法で証明していきます。

【解答】

(1) $a_2=2a_1+3b_1=2\cdot2+3\cdot1=7$

$b_2=a_1+2b_1=2+2\cdot1=4$

$c_2=7\cdot4=28\cdots$ 答

(2) a_n，b_n の偶奇が異なる，すなわち $\begin{cases}a_n,\ b_n\text{ は正の整数}\\ a_n+b_n=(\text{奇数})\end{cases}\cdots(*)$

であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$a_1=2$，$b_1=1$ で，$a_1+b_1=3$ となり，$(*)$ は正しい。

(ii) $n=k$（$k=1,2,3,\cdots$）のとき

$\begin{cases}a_k,\ b_k\text{ は正の整数}\\ a_k+b_k=(\text{奇数})\end{cases}$ であると仮定する。

$\begin{cases}a_{k+1}=2a_k+3b_k & \cdots①\\ b_{k+1}=a_k+2b_k & \cdots②\end{cases}$ であり，a_{k+1}，b_{k+1} は正の整数。

①＋② より

$$\begin{aligned}a_{k+1}+b_{k+1}&=3a_k+5b_k\\&=3(a_k+b_k)+2b_k\\&=3\cdot(\text{奇数})+(\text{偶数})\ (\because\ \text{帰納法の仮定})\\&=(\text{奇数})\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

(i)，(ii) から，$n=1,2,\cdots$ に対して a_n，b_n は正の整数であり，a_n，b_n の偶奇は異なることが示された。

ゆえに，a_n，b_n の一方は偶数であるため，$c_n=a_nb_n$ は偶数である。

(3) $m=1,2,\cdots$ に対して，b_{2m} が 4 の倍数である $\cdots$(☆)

これを数学的帰納法で示す。

(Ⅰ) $m=1$ のとき $b_2=4$ より (☆) は正しい。

(Ⅱ) $m=k$（$k=1,2,3,\cdots$）のとき

b_{2k} が 4 の倍数であると仮定する。

$$\begin{aligned}b_{2k+2}&=a_{2k+1}+2b_{2k+1}\\&=(2a_{2k}+3b_{2k})+2(a_{2k}+2b_{2k})\\&=4a_{2k}+7b_{2k}\end{aligned}$$

仮定から，$b_{2k+2}=(4\text{ の倍数})+7\cdot(4\text{ の倍数})$
$=(4\text{ の倍数})$

となり，$m=k+1$ のときも (☆) は正しい。

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，$m=1,2,\cdots$ に対して b_{2m} は 4 の倍数である。

次に，$m=1, 2, \cdots$ に対して c_{2m} が 7 の倍数である …(★)

これを数学的帰納法で示す。

(ア)　$m=1$ のとき　(1) より　$c_2=28\,(=7\cdot 4)$ で (★) は正しい。

(イ)　$m=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき

c_{2k} が 7 の倍数であると仮定する。

$$\begin{aligned}
c_{2k+2}&=a_{2k+2}b_{2k+2}\\
&=(2a_{2k+1}+3b_{2k+1})(a_{2k+1}+2b_{2k+1})\\
&=2a_{2k+1}{}^2+6b_{2k+1}{}^2+7a_{2k+1}b_{2k+1}\\
&=2(2a_{2k}+3b_{2k})^2+6(a_{2k}+2b_{2k})^2+7c_{2k+1}\\
&=2(4a_{2k}{}^2+12a_{2k}b_{2k}+9b_{2k}{}^2)+6(a_{2k}{}^2+4a_{2k}b_{2k}+4b_{2k}{}^2)+7c_{2k+1}\\
&=14a_{2k}{}^2+42b_{2k}{}^2+48a_{2k}b_{2k}+7c_{2k+1}\\
&=7(2a_{2k}{}^2+6b_{2k}{}^2+c_{2k+1})+48c_{2k}
\end{aligned}$$

帰納法の仮定より，c_{2k} は 7 の倍数であるので，

$$\begin{aligned}
c_{2k+2}&=(7\text{ の倍数})+48\cdot(7\text{ の倍数})\\
&=(7\text{ の倍数})
\end{aligned}$$

となる。

よって，$m=k+1$ のときも (★) は正しい。

(ア)，(イ) より，$m=1, 2, \cdots$ に対して c_{2m} は 7 の倍数である。

以上から，c_{2m} は 4 の倍数かつ 7 の倍数であり，28 の倍数である。

【総括】

漸化式が与えられているからと言って一般項に向かうとグチャグチャになってしまいます。

漸化式を解くだけでなく，漸化式を漸化式のまま扱うことも実践レベルでは大切なことです。

方向性を決めるための「実験」も試験場では大切です。