正の実数 x，y が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2} \cdots\cdots (★)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x，y が (★)，および $1-\frac{x}{y}>0$ を満たして動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ。

＜ '21 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **目がチカチカする式ですし，$3^x=X$，$3^{y^2}=Y$ と置きたくなります。**

ただ，よくよく観察してみると，3^{4x} という塊で考えれば十分だなということが分かるので，$3^{4x}=X$，$3^{y^2}=Y$ という置き換えによって整理していきます。

(2) **2 変数関数の最大を求める問題ですが，(1) から今回は従属 2 変数です。**

文字を消去するのが最有力の路線でしょう。

文字が消える際は，「遺産の整理」という言葉が大切です。

$x>0$，$y>0$ **という条件のもとでは**

$$\begin{aligned}1-\frac{x}{y}>0 &\Leftrightarrow y-x>0\\ &\Leftrightarrow y>x\\ &\Leftrightarrow y^2>x^2\\ &\Leftrightarrow 4x-1>x^2\ (\because (1))\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+1<0\\ &\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

ですから，この範囲の下で考えていきます。

$$\begin{aligned}(与式)&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)\\ &=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\end{aligned}$$

であり，どちらを文字消去するかですが，x を消去する方が若干計算量が減ると思います。(帯分数に直す際の計算が若干楽)

あとは，相加・相乗平均の関係で仕留めます。

不等式から最大値をいうときは，必ず等号成立条件に言及しましょう。

【解答】

(1) $3^{4x}=X$，$3^{y^2}=Y$ とおく。

(★) は $3^{8x}+9\cdot 3^{2y^2}=2\cdot 3^{4x}\cdot 3^{y^2}\cdot 3^1$ と変形でき

$X^2+9Y^2=6XY$，すなわち $9Y^2-6XY+X^2=0$

これは $(3Y-X)^2=0$ となり，$Y=\frac{X}{3}$ を得る。

ゆえに，$3^{y^2}=\frac{3^{4x}}{3}=3^{4x-1}$

したがって，$y^2=4x-1$ … 答

(2) $1-\frac{x}{y}>0$ より，$\frac{y-x}{y}>0$

$x>0$，$y>0$ という条件に注意すれば $y>x$

さらに，$x>0$，$y>0$ なので，$y^2>x^2$

(1) から，$4x-1>x^2$，すなわち $x^2-4x+1<0$

$x>0$ にも注意してこれを解くと，$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ …①

このとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)\\ &=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\\ &=\log_4\left\{1-\frac{\frac{(y^2+1)^2}{16}}{y^2}\right\}\ (\because (1)\ より x を消去)\\ &=\log_4\left\{1-\frac{1}{16}\left(y^2+\frac{1}{y^2}+2\right)\right\}\\ &\leqq\log_4\left\{1-\frac{1}{16}\left(2\sqrt{y^2\cdot\frac{1}{y^2}}+2\right)\right\}\\ &=\log_4\left\{1-\frac{1}{16}\cdot 4\right\}\\ &=\log_4\frac{3}{4}\end{aligned}$$

等号成立条件は $y^2=\frac{1}{y^2}$ で，$y^4=1$

$y>0$ という条件に注意すれば，$y=1$ のときに等号が成立する。

このとき，$x=\frac{y^2+1}{4}=\frac{1}{2}$ であり，① を満たす。

以上から，求める最大値は $\log_4\frac{3}{4}$ … 答

【総括】

(1) は，少しでも目に優しく置き換えましょう。

その後の (2) の相加平均・相乗平均の関係で仕留めるオチも (1) の誘導があれば標準的な難易度だと思います。

置き換えて，相加平均・相乗平均の関係で最大最小を仕留めるという流れは第２問と同じ流れですね。