a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1，点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく。

(1) Cの座標を a を用いて表せ。

(2) a が $a>0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。ただし，$|\mathrm{AB}|$ および $|\mathrm{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

＜ '21 北海道大 ＞

【戦略】

最初に感じたのは $a+2$ である必要性がないということでした。

なので，(1)，(2) 通じて $b=a+2$ と置きなおします。

(1) **定番の構図であり，$\mathrm{C}\left(\dfrac{b-1}{2},\ \square\right)$ という形になることは演習量が十分足りていれば，当然身構えておくべき結果です。**

ℓ_1，ℓ_2 の式を立てて連立方程式を解きますが，実際は解くふりをして上記の基本事項から，y 座標のみ計算すればよいでしょう。

(2) **引き続き b という置き換えのまま計算を進めていきます。**

素直に $|\mathrm{AB}|$，$|\mathrm{BC}|$ を b で表せますし，計算していくと同じパーツで括れることが分かります。

比をとれば，約分されて，結果 $\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\dfrac{b^2-2b+5}{b^2+1}}$ という形になります。

ここからは「頭でっかち (仮分数) は嫌われる」という格言通り，帯分数に直し，$\sqrt{1-2\cdot\dfrac{b-2}{b^2+1}}$ としてやります。

微分に走ってもよいですが，さらに

$$\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{\dfrac{b^2+1}{b-2}}}=\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{(b+2)+\dfrac{5}{b-2}}}$$

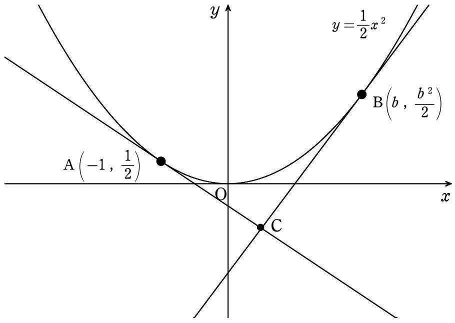
と見るのも定番の工夫です。(初見だとテクっているように見えますが割と定番の処理ですので，慣れている人からすれば普通に見えます。)

この後は相加・相乗の帳尻合わせとして

$$\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{(b-2)+\dfrac{5}{b-2}+4}}$$

と見ればよいでしょう。$a>0$ という条件が効いてきて，$b-2>0$ となりますので，目論み通り相加・相乗平均の関係で仕留めます。

【解答】



(1) $a+2=b$ とおく。$a \neq -3$ という条件から，$b \neq -1$

このとき，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ となる。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，$y'=x$

ℓ_1 の方程式は $y=-(x+1)+\dfrac{1}{2}$，すなわち $y=-x-\dfrac{1}{2}$

ℓ_2 の方程式は $y=b(x-b)+\dfrac{b^2}{2}$，すなわち $y=bx-\dfrac{b^2}{2}$

これら 2 式を連立して解くと，$x=\dfrac{b-1}{2}$，$y=-\dfrac{b}{2}$

ゆえに，ℓ_1，ℓ_2 の交点 C の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{b-1}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$

$b=a+2$ より，C の座標を a で表すと，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+1}{2},\ -\dfrac{a+2}{2}\right)$ …答

(2)
$$\begin{aligned}|\mathrm{AB}|&=\sqrt{(b+1)^2+\left(\frac{b^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}\{4+(b-1)^2\}}\\&=\frac{|b+1|}{2}\sqrt{b^2-2b+5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{BC}|&=\sqrt{\left(b-\frac{b-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b^2}{2}+\frac{b}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}(1+b^2)}\\&=\frac{|b+1|}{2}\sqrt{b^2+1}\end{aligned}$$

ゆえに，
$$\begin{aligned}\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}&=\sqrt{\frac{b^2-2b+5}{b^2+1}}\\&=\sqrt{1-2\cdot\frac{b-2}{b^2+1}}\end{aligned}$$

今，条件 $a>0$ より，$a+2>2$ であり，$b>2$ であることから

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{\dfrac{b^2+1}{b-2}}}=\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{(b+2)+\dfrac{5}{b-2}}}$$

これより，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{1-2\cdot\dfrac{1}{(b-2)+\dfrac{5}{b-2}+4}}$

$b>2$，すなわち $b-2>0$ なので，相加平均，相乗平均の関係から

$$(b-2)+\frac{5}{b-2}+4\geqq 2\sqrt{(b-2)\cdot\frac{5}{b-2}}+4=2\sqrt{5}+4$$

等号成立条件を考える。

$b-2=\dfrac{5}{b-2}$ で，$(b-2)^2=5$

$b-2>0$ に注意すれば，$b-2=\sqrt{5}$

これより，$b=2+\sqrt{5}$ のとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ は最小となる。

このとき，$a+2=b$ であることから，$a=b-2=\sqrt{5}$

以上から，求める a の値は $a=\sqrt{5}$ … 答

【総括】

(1) の構図は定番の処理ですし，(2) の相加・相乗平均で仕留めるオチについても定番なので，計算ミスさえ気を付ければ完答は十分狙えるはずです。

計算を合わせるにあたっては，今回のように置き換えを駆使して，計算ミスを少しでも減らす工夫や，目に優しくする工夫をしたいところです。

敢えて $a+2$ という形のまま計算を進めていく必要性はありません。

汚い (今回はそこまで汚いというわけでもないですが) 形に対して，b という「ゴム手袋」をつけて，処理していきました。

相加平均，相乗平均に持ち込む路線が見えなければ（見えていてほしいですが）微分するというエスケープ路線もありますので，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ をミスなく計算できたのであれば，勢いにのって完答を狙いたいですね。