　三角形OABにおいて，辺ABを $2:1$ に内分する点をDとし，直線OAに関して点Dと対称な点をEとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) 点Bから直線OAに下ろした垂線と直線OAとの交点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形BDEの面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

＜ ’21 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ というのは $\vec{b}$ を $\vec{a}$ 方向に正射影したベクトルで，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は方向は分かっています。($\vec{a}$ 方向)**

なので，$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ という大きささえ求まれば解決だということです。

$\vec{a}$ 方向の単位ベクトルを $\vec{e}\left(=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)$ とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\vec{e}$ ですから。

$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\vec{b}|\cos\theta$ なのですが

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ という条件から $|\vec{b}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ となり

これにて $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=\dfrac{3}{2}$ を得るため，解決です。

(2) **線分DEの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ です。**

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を出すにあたっては，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が分かれば解決します。

Mも線分OA上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\,\vec{a}$ (k は実数) という形で書けるはずであり，(1) 同様 $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ という大きささえ分かれば解決です。

図を書いてみて目につくのは相似比を利用してFMの長さを出してしまう方針であり，今回はそれで進めていきます。

(3) **$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}})^2}$ という面積公式を用いる路線については積極的にとりたくはありません。**

$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{5}{9}$ という条件を「言い換え」によって，同値な条件に変形します。

様々なことが考えられますが，お隣の三角形ADEに注目すれば $\triangle\mathrm{BDE}$，$\triangle\mathrm{ADE}$ は高さが共通の三角形なので，

面積比＝底辺比

が成り立つため，$\triangle\mathrm{ADE}=\dfrac{10}{9}$ と言うことができ，さらに使い勝手をよくするために対称性から $\triangle\mathrm{ADM}=\dfrac{5}{9}$ と言い換えます。

結局 $\dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{DM}}|=\dfrac{5}{9}$ で，これまでの経緯から $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\dfrac{5}{3}$ と得られるので，$|\overrightarrow{\mathrm{DM}}|=\dfrac{2}{3}$ となるときを捉えればよいことになるでしょう

【解答】

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\,(>0)$ なので，θ は鋭角であることに注意する。

今，条件 $|\vec{a}|=4$ より，

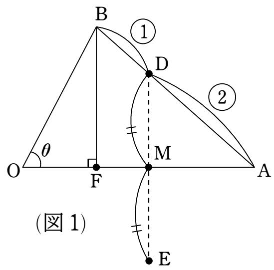
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=4|\vec{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

また，条件 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ より，$4|\vec{b}|\cos\theta=6$

すなわち $|\vec{b}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\left(=\dfrac{1}{4}\vec{a}\right)$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\vec{e}\\&=|\vec{b}|\cos\theta\,\vec{e}\ (\because\ (図1))\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\vec{a}\\&=\frac{3}{8}\vec{a}\ \cdots 答\end{aligned}$$



(図1)

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\vec{b}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{FA}}|=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$

直線DEと直線OAの交点をMとする。

$\mathrm{DM}\perp\mathrm{OA}$，$\mathrm{BF}\perp\mathrm{OA}$ なので，$\mathrm{DM}\,/\!/\,\mathrm{BF}$

これより，$\triangle\mathrm{ADM}\backsim\triangle\mathrm{ABF}$ で，$\mathrm{AM}:\mathrm{MF}=\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$

ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{FM}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{FA}}|=\dfrac{5}{6}$

これより，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|&=|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|+|\overrightarrow{\mathrm{FM}}|\\&=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\\&=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

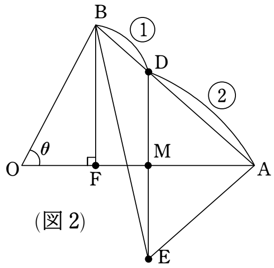
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{7}{3}\vec{e}=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\vec{a}=\dfrac{7}{12}\vec{a}$

一方，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{7}{6}\vec{a}-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\ \cdots 答\end{aligned}$$

(3)　△BDE : △ADE＝1 : 2 なので



(図 2)

$$\triangle ADE = 2\triangle BDE = 2\cdot\frac{5}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\triangle ADM = \frac{1}{2}\triangle ADE = \frac{5}{9} \cdots ①$$

$$|\overrightarrow{AM}| = 4 - |\overrightarrow{OM}| = 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$$

①より，$\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{DM}| = \frac{5}{9}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot|\overrightarrow{DM}| = \frac{5}{9}$ で，$|\overrightarrow{DM}| = \frac{2}{3}$ を得る。

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OD} = \frac{7}{12}\vec{a} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{DM}|^2 = \frac{4}{9}$ であることから，$\left|\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right|^2 = \frac{4}{9}$

$$\frac{1}{16}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{4}{9}$$

条件 $|\vec{a}| = 4$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ を代入すると

$1 - 2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{4}{9}$ で，$|\vec{b}|^2 = \frac{\frac{4}{9}+1}{\frac{4}{9}} = \frac{13}{4}$ を得る。

ゆえに，$|\vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ …答

【部分的別解 2】～ 方針のみ ～

$|\overrightarrow{DM}| = \frac{2}{3}$ **と得られた後**，$\triangle ADM \backsim \triangle ABF$ **に注目すれば**

$DM : BF = 2 : 3$ **であり**，$|\overrightarrow{BF}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{DM}|$ **なので**，$|\overrightarrow{BF}| = 1$ **を得ます。**

これは $|\vec{b}|\sin\theta = 1$ **ということを意味します。**

(1) **の導出過程である** $|\vec{b}|\cos\theta = \frac{3}{2}$ **と併せれば**

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **を用いて** $\frac{1}{|\vec{b}|^2} + \frac{9}{4|\vec{b}|^2} = 1$

となり，$4|\vec{b}|^2 = 13$ **ですから**，$|\vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ **を得ます。**

【総括】

ベクトルの問題ですが，適宜幾何的なモノの見方を要する場面があり，相互横断的な力が必要です。

(1) については，正射影ベクトルとお友達になっていて即座に出せる人も少なくないかと思いますが，結局記述式試験ではある程度の説明をつける必要があることを考えると，正射影ベクトルの導出過程から理解しておく必要があるでしょう。

(3) も様々な別解が考えられます。

△OAB の面積に帰着させる方法もあるでしょうが，解答のように△BDE → △ADE → △ADM と，注目する三角形を変えるという点で本質的には同じことでしょう。