次の各問に答えよ。

問 1　n を 2 以上の整数とする。3^n-2^n が素数ならば n も素数であることを示せ。

問 2　a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a)=af(1)$ を満たすとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ。

＜ '21 京都大 ＞

【戦略】

問 1　素数 (1 と自分自身以外で割り切れない) という否定的なことを証明することを考えると，背理法 (もしくは対偶を考える) という路線は外したくないでしょう。

n が素数でないと仮定したとき，$n=MN$ (M，N は 2 以上の整数) と表せます。

$3^{MN}-2^{MN}=(3^M)^N-(2^M)^N$ **と見て，x^N-y^N の因数分解**

$$x^N-y^N=(x-y)(x^{N-1}+x^{N-2}y+x^{N-3}y^2+\cdots+xy^{N-2}+y^{N-1})$$

の運用を考えたいところです。

問 2　$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の式は $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

すなわち，$y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$ であり，これが原点を通るための条件が

$$-tf'(t)+f(t)=0$$

であることを考えると，結局示すべきことは

$-tf'(t)+f(t)=0$ を満たすような実数 t が少なくとも 1 つ存在する

ということになります。

ここで，$f(a)=af(1)$ という不思議な関係式を

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(1)}{1}$$

と見ることができれば，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ という関数の設定に辿り着きます。

すると，与えられた条件は，$g(1)=g(a)$ $(a>1)$ ということです。

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ **であり，示すべきことに目を向けると**

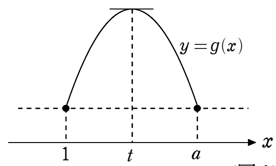
$g'(t)=0$ となる t の存在が言えれば，$-tf'(t)+f(t)=0$ を満たすような実数 t の存在が保証され，題意が示されることになります。

$g(1)=g(a)$ $(a>1)$ というのは

$x=1$ と $x=a$ で $y=g(x)$ のグラフの高さが揃う

ということを意味します。

$y=g(x)$ が $x=0$ 以外で微分可能であることを考えれば，$1<x<a$ の範囲で少なくとも 1 つは極値をもつことになり，$g'(t)=0$ となる t の存在が保証されます。((図 1) 参照)



(図 1)

式的にこれを保証する定理が「平均値の定理」です。

解答では逆算的にこれをまとめていきます。

【解答】

問 1

3^n-2^n が素数であるとき，n が素数でないと仮定する。

このとき，2 以上の整数 M，N を用いて $n=MN$ と表せる。

$$3^n-2^n=(3^M)^N-(2^M)^N$$

$$=(3^M-2^M)\{(3^M)^{N-1}+(3^M)^{N-2}(2^M)+(3^M)^{N-3}(2^M)^2+\cdots+(3^M)(2^M)^{N-2}+(2^M)^{N-1}\}\cdots①$$

$3^M-2^M=(2^M)\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^M-1\right\}$ であり，M に関して単調増加であるため

$$3^M-2^M\geqq 3^2-2^2=5\ \cdots②$$

一方，

$$(3^M)^{N-1}+(3^M)^{N-2}(2^M)+(3^M)^{N-3}(2^M)^2+\cdots+(3^M)(2^M)^{N-2}+(2^M)^{N-1}$$

は各々の項が自然数で，N 個の項からなる和であるため

$$(3^M)^{N-1}+(3^M)^{N-2}(2^M)+(3^M)^{N-3}(2^M)^2+\cdots+(3^M)(2^M)^{N-2}+(2^M)^{N-1}$$

$$\geqq\overbrace{1+1+\cdots\cdots+1}^{N\text{個}}$$

$$=N\ (\geqq 2)\ \cdots③$$

①，②，③ から，3^n-2^n が 2 以上の整数の積の形となり，3^n-2^n が素数であることに矛盾する。

よって，仮定は誤りで，3^n-2^n が素数であるとき，n は素数である。

問 2

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ と定めると，$g(x)$ の定義域は $x \fallingdotseq 0$ であり，$1<x<a$ で定義可能である。

注意：$f(x)$ が $1<x<a$ で定義可能だとみなしました。

$1<x<a$ において $f(x)$ は微分可能であり，$g(x)$ も微分可能であるため，平均値の定理から

$$\frac{g(a)-g(1)}{a-1}=g'(c) \text{ かつ } 1<c<a$$

を満たす c が存在する。

$$\frac{\dfrac{f(a)}{a}-\dfrac{f(1)}{1}}{a-1}=\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}$$

条件 $f(a)=af(1)$ で，$a>1$ であるため，$\dfrac{f(a)}{a}=f(1)$

ゆえに，$cf'(c)-f(c)=0 \cdots (*)$ を得る。

ここで，$y=f(x)$ 上の点 $(c\ ,\ f(c))$ における接線 ℓ の式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

この式において $x=0$ とすると，

$$\begin{aligned} y&=-cf'(c)+f(c)\\ &=0 \quad (\because (*)) \end{aligned}$$

ゆえに，ℓ は原点を通るため，題意は示された。

【総括】

問 1 についてはメルセンヌ素数（2^n-1 という形の素数）についての問題

2^n-1 が素数ならば，n は素数である

という有名事実があります。（頻出かどうかは別としてこれ自体が入試で出題されることもあります。）

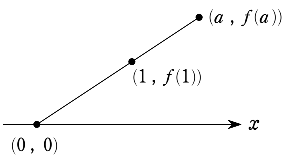
その話題の延長的なものを感じます。

問 2 は京大でよく出る抽象的な関数に関する論述で敷居が高い問題です。

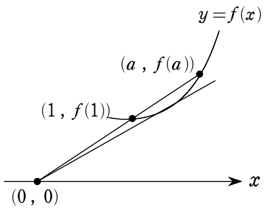
$\dfrac{f(x)}{x}$ は $(0\ ,\ 0)$ と $(x\ ,\ f(x))$ を結ぶ直線の傾きを表します。

今回の条件 $f(a)=af(1)$，すなわち $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(1)}{1}$ というのは

3 点 $(0\ ,\ 0)$，$(1\ ,\ f(1))$，$(a\ ,\ f(a))$ が同一直線上にあることを意味します。



どちらかには膨らんでますから，題意の主張は感覚的には納得できる結果です。



もちろんどんな意地悪な図でもこういったことが言えるということを示すのが趣旨ですから，何かしら式的なバックボーンが必要です。