xy 平面において，2 点 $\mathrm{B}(-\sqrt{3}\,,\,-1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3}\,,\,-1)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする。

$$(*)\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}\ \text{かつ 点 A の}\ y\ \text{座標は正。}$$

次の各問に答えよ。

(1) △ABCの外心の座標を求めよ。

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，△ABCの垂心の軌跡を求めよ。

＜ ’21 京都大 ＞

【戦略】

(1) **線分 BC の垂直二等分線が y 軸であることを考えると，求める外心は y 軸上のどこかにあることになるでしょう。**

外心を K と呼ぶと，幾何的に $\mathrm{BK}=2$ であることは分かります。
(正弦定理を用いてもいいですし，円周角の定理から $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形が現れるので，それを用いてもよいでしょう。)

いずれにせよ，y 軸上の点 K で，$\mathrm{BK}=2$ を満たす点は 2 つあります。

今回は $(*)$ の条件から A の y 座標が正であることを考えればどちらのケースなのかは一目瞭然です。

(2) **垂心を H とします。軌跡の基本である $\mathrm{H}(X\,,\,Y)$ とおき，X，Y の関係式を求めに行くという方針でよいでしょう。**

点 $\mathrm{A}(s\,,\,t)$ としたときに $s^2+t^2=4\ (t>0)$ という s，t の関係式は手元にあるわけです。

流れとしては

垂心 H は点 A の場所に依存するので $\begin{cases} X=(s\,,\,t\ \text{の式}) \\ Y=(s\,,\,t\ \text{の式}) \end{cases}$ で与えられる

(※ 実際には線分 BC に垂直な直線が $x=\square$ という簡単な式なので $X=s$)

→ これを $\begin{cases} s=(X\,,\,Y\ \text{の式}) \\ t=(X\,,\,Y\ \text{の式}) \end{cases}$ に直して，先ほどの $s^2+t^2=4\ (t>0)$

という s，t の関係式に代入して X，Y の関係式を Get する。

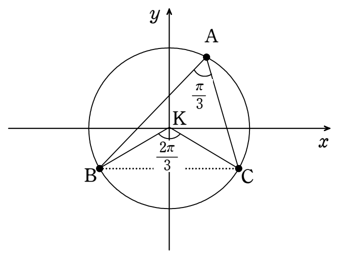
以上の流れになります。

【解答】

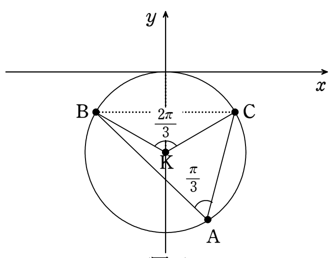
(1) △ABCの外心を K とすると，K は線分 BC の垂直二等分線上の点なので

$$\mathrm{K}(0\,,\,k)$$

とおける。



(図 1)



(図 2)

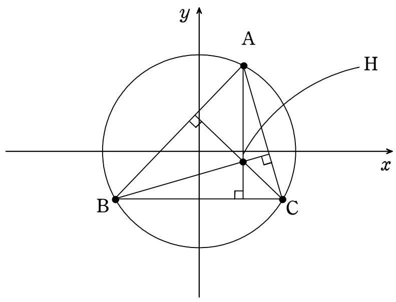
正弦定理から，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\,\mathrm{BK}$ で，$\mathrm{BK}=2$ を得る。

よって $(\sqrt{3})^2+\{k-(-1)\}^2=4$ で，これより，$k=0,\ -2$ を得る。

$k=-2$ は (図 2) の状況を与えるので，$(*)$ の条件である点 A の y 座標が正という条件を満たさない。

ゆえに，$k=0$ であり，求める外心の座標は $(0,\ 0)$ … 答

(2)



$\mathrm{A}(s\,,\,t)$，$\mathrm{H}(X\,,\,Y)$ とする。

BCに垂直な直線 AH は $x=s$ で与えられるので，$X=s$

これより，$H(s\,,\,Y)$ と置きなおせる。

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}-s\\-1-t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}s\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+\sqrt{3}\\Y+1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=0$ なので，$(\sqrt{3}-s)(s+\sqrt{3})+(-1-t)(Y+1)=0$

整理すると，$s^2+tY+t+Y=2$，すなわち $(t+1)Y=2-s^2-t$

ここで，$\begin{cases} s^2+t^2=4 & \cdots ① \\ t>0 & \cdots ② \end{cases}$

② より，$t \neq -1$ であるため，

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2-s^2-t}{t+1} \\ &= \frac{2-(4-t^2)-t}{t+1} \\ &= \frac{t^2-t-2}{t+1} \\ &= \frac{(t+1)(t-2)}{t+1} \\ &= t-2 \end{aligned}$$

これより，$t=Y+2$ を得て，再び ② より，$Y>-2$

まとめると，$\begin{cases} s=X \\ t=Y+2 \end{cases}$ で，①，② より

$$\begin{cases} X^2+(Y+2)^2=4 \\ Y>-2 \end{cases}$$

を得る。

以上から求める垂心 H の軌跡は

円 $x^2+(y+2)^2=4$ の $y>-2$ を満たす部分 … 答

【戦略 2】

外心が O である三角形 ABC の垂心 H に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

という性質を用いれば，垂心の座標は即座に求まります。

【解 2】(2) について

(1) より，原点 O が △ABC の外心である。

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点 H について

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$$

これは，H が △ABC の垂心であることを意味する。

A(s, t)，H(X, Y) とおくと，

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} X=s \\ Y=t-2 \end{cases}$ を得る。

今，$\begin{cases} s^2+t^2=4 \\ t>0 \end{cases}$ を満たしながら動いているので，

$$X^2+(Y+2)^2=4,\quad Y>-2$$

を得る。

以上から求める垂心 H の軌跡は

円 $x^2+(y+2)^2=4$ の $y>-2$ を満たす部分 … 答

【総括】

京大にしては珍しく (1) の誘導がありました。

難易度とは別にして，(1) は どこまでを自明のものとしてよいのかという点で少し記述面で書きづらさを感じた人も多かったかもしれません。

【戦略 2】でとった作戦は経験がモノを言います。

三角形ABC の外心 O，重心 G，垂心 H について，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となり，これは，O，G，H が同一直線上にあることを意味します。

この O，G，H が乗っている直線は「オイラー線」と呼ばれる有名なものです。

試験場でそこまでうまくできなかったとしても，【戦略 1】でとったように軌跡の基本に忠実に考えていけば無理はなかったと思います。