曲線 $y=\log(1+\cos x)$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

< '21 京都大 >

【戦略】

$y=f(x)$ 上の点 P $(x\,,\,f(x))$ が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で動くときに点 P が動く道のり L は

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

という公式で与えられます。

方針面で困ることはないでしょうから，計算勝負です。

結果的に本問は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$ を計算することになります。

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta$ タイプの積分計算はクセがあり，$\displaystyle\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$ と見て

$$\int\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\,d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta$$

とすれば $\dfrac{f'}{f}$ という形が現れて $\log$ ることになります。

【解答】

$y=\log(1+\cos x)$ について $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\frac{2}{1+\cos x}$$

$$=\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

求める長さ L は

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\,dx\quad\left(\text{積分区間から } 0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{4}\text{ だから }\cos\frac{x}{2}>0\right)$$

$\dfrac{x}{2}=X$ とおくと，$\dfrac{1}{2}dx=dX$ で，

x	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$
X	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

$$L=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos X}\,dX$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos X}{\cos^2 X}\,dX$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos X}{(1+\sin X)(1-\sin X)}\,dX$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos X}{1+\sin X}+\frac{\cos X}{1-\sin X}\,dX$$

$$=\Big[\log|1+\sin X|-\log|1-\sin X|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+\sin X}{1-\sin X}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=2\log(\sqrt{2}+1)\ \cdots\ 答$$

【総括】

曲線の長さ（点が曲線上を動く道のり）の公式は

$y=f(x)\ (\alpha \leqq x \leqq \beta)$ という陽関数表示が相手なら

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}\ (t_1 \leqq t \leqq t_2)$ というパラメータ表示が相手なら

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で倒します。

戦略でも言いましたが，本問は計算勝負で，$\displaystyle\int\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の処理ができたかどうかという勝負になるでしょう。

初見だとキツイ形ですが，逆に言えば勉強していれば確保できる形です。

$\displaystyle\int(\cos\ )^{\text{奇数}}\,dx$ では 1 乗を分離するのがセオリーです。

今回も 1 乗を準備するために $\displaystyle\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$ と見ます

ちなみに京大は 2019 年度の第 1 問（小問集合）の (2) で $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ を求めさせる問題を出題しています。

そういった意味で過去問をやっていれば必ず出会っていることになります。