無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ。

< '21 京都大 >

【戦略1】

まず一旦 $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ **という部分和を考えていき，その後** $n\to\infty$ **として無限級数を考えることになります。**

$\cos\frac{k\pi}{6}$ **の値については，k を 12 で割った余りによって周期的に変化します。（符号の調整をする分には 6 で割った余りで分類すれば十分です。）**

そこで，$x_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ **とおき，**x_{6m}，x_{6m+1}，……，x_{6m+5} **を捉えていきます。**

$N=0,1,2,\cdots$ **として**

$$\sum_{m=0}^{N}(x_{6m}+x_{6m+1}+x_{6m+2}+x_{6m+3}+x_{6m+4}+x_{6m+5})$$

を考えていき，$N\to\infty$ **とすれば，**$\lim_{N\to\infty}S_{6N+5}$ **が得られます。**

$\lim_{N\to\infty}S_{6N+5}=S$ **とすれば，**$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ **なので**

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+4}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+5}-x_{6N+5}\}=S$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+3}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+4}-x_{6N+4}\}=S$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+2}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+3}-x_{6N+3}\}=S$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+1}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+2}-x_{6N+2}\}=S$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+1}-x_{6N+1}\}=S$$

なので，トータルの結論として，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ **が得られます。**

【解1】

$x_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ とおき，以下では $m=0,1,2,\cdots$ とする。

(i) $k=6m$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\cos\frac{6m\pi}{6}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^m\cos m\pi\\&=\left(\frac{1}{64}\right)^m(-1)^m\\&=\left(-\frac{1}{64}\right)^m\end{aligned}$$

(ii) $k=6m+1$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m+1}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+1}\cos\frac{(6m+1)\pi}{6}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^m\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+m\pi\right)\\&=\left(\frac{1}{64}\right)^m\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)^m\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{1}{64}\right)^m\end{aligned}$$

(iii) $k=6m+2$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m+2}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+2}\cos\frac{(6m+2)\pi}{6}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^m\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+m\pi\right)\\&=\left(\frac{1}{64}\right)^m\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)^m\\&=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{64}\right)^m\end{aligned}$$

(iv) $k=6m+3$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m+3}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+3}\cos\frac{(6m+3)}{6}\pi\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)\\&=0\end{aligned}$$

(v) $k=6m+4$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m+4}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+4}\cos\frac{(6m+4)\pi}{6}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^m\cdot\frac{1}{16}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}+m\pi\right)\\&=\left(\frac{1}{64}\right)^m\cdot\frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^m\\&=-\frac{1}{32}\left(-\frac{1}{64}\right)^m\end{aligned}$$

(vi) $k=6m+5$ のとき

$$\begin{aligned}x_{6m+5}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{6m+5}\cos\frac{(6m+5)\pi}{6}\\&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^m\cdot\frac{1}{32}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}+m\pi\right)\\&=\left(\frac{1}{64}\right)^m\cdot\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-1)^m\\&=-\frac{\sqrt{3}}{64}\left(-\frac{1}{64}\right)^m\end{aligned}$$

$$x_{6m}+x_{6m+1}+x_{6m+2}+x_{6m+3}+x_{6m+4}+x_{6m+5}$$

$$=\left(-\frac{1}{64}\right)^m\left\{1+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{8}+0-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{64}\right\}$$

$$=\frac{70+15\sqrt{3}}{64}\left(-\frac{1}{64}\right)^m$$

$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}\ \left(=\sum_{k=0}^{n}x_k\right)$ とおき，$N=0,1,2,\cdots\cdots$ とする。

$$\begin{aligned}S_{6N+5}&=\sum_{k=0}^{6N+5}x_k\\&=\sum_{m=0}^{N}\{x_{6m}+x_{6m+1}+x_{6m+2}+x_{6m+3}+x_{6m+4}+x_{6m+5}\}\\&=\sum_{m=0}^{N}\frac{70+15\sqrt{3}}{64}\left(-\frac{1}{64}\right)^m\\&=\frac{70+15\sqrt{3}}{64}\cdot\frac{\left\{1-\left(-\frac{1}{64}\right)^{N+1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{64}\right)}\\&=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\left\{1-\left(-\frac{1}{64}\right)^{N+1}\right\}\end{aligned}$$

ゆえに，$\lim_{N\to\infty}S_{6N+5}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$

$r=0,1,2,\cdots,5$ として，$\lim_{m\to\infty}x_{6m+r}=0$ であるため，

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+4}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+5}-x_{6N+5}\}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+3}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+4}-x_{6N+4}\}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+2}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+3}-x_{6N+3}\}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N+1}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+2}-x_{6N+2}\}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_{6N}=\lim_{N\to\infty}\{S_{6N+1}-x_{6N+1}\}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

以上から，$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$ を得るため，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\ \cdots 答$$

【戦略 2】

経験がモノを言いますが，

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ \left(=\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$$

とおくと，ド・モアブルの定理から，

$$z^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$$

です。

つまり，$x_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ とおくと，x_k は z^k の実部ということになります。

【解 2】

$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ とおく。

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ \left(=\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$$

とおくと，ド・モアブルの定理から

$$z^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}\right)(=x_k+y_ki\ \text{とする})$$

$$\sum_{k=0}^{n}z^k=\sum_{k=0}^{n}x_k+i\sum_{k=0}^{n}y_k$$

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\sum_{k=0}^{n}x_k+i\sum_{k=0}^{n}y_k$$

$$\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}=\sum_{k=0}^{n}x_k+i\sum_{k=0}^{n}y_k\ \cdots(*)$$

a，b，u_n，v_n を実数として，

$$\frac{1}{1-z}=a+bi,\ \frac{z^{n+1}}{1-z}=u_n+v_ni$$

とおき，$(*)$ の 実部を見比べると

$$\sum_{k=0}^{n}x_k=a+u_n$$

これより，$|u_n|=\left|\sum_{k=0}^{n}x_k-a\right|\ \cdots(*)'$

今，$(0\leqq)\,|u_n|\leqq\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{|1-z|}$ で，(最右辺)$\to 0\ (n\to\infty)$

はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$

$(*)'$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k&=a\\&=\left(\frac{1}{1-z}\ \text{の実部}\right)\\&=\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{4}}\ \text{の実部}\right)\\&=\left(\frac{(14+3\sqrt{3})+(5+2\sqrt{3})i}{13}\ \text{の実部}\right)\\&=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\end{aligned}$$

以上から，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\ \cdots 答$

【総括】

部分和をとってから，その極限を考えるという点は外してはいけません。

目につくのは周期性だと思いますので，それを活かす【解 1】の方針は緊張した試験場では思いつきやすい解答路線かと思います。

ただ，【解 2】の複素数を持ち出して実部虚部を捉える路線も勉強していれば有名な解法です。