曲線 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ。

＜ '21 京都大 ＞

【戦略】

素直に接点 P の座標を $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)$ として接線の式を立式し，x 切片を求めれば Q の座標が求まり，L が t の式として求まります。

Q の座標を求めるにあたり，$t=0$ か $t\neq0$ かで場合分けが必要になりますが，$t=0$ のときは接線が $y=\frac{1}{2}$ となり，x 軸と交わらないため問題の条件に反してしまいます。

ゆえに，$t\neq0$ として話を進めていきますが，今回の放物線は y 軸対称ですから，その対称性を考えれば $t>0$ の範囲で考えれば十分です。

そこで，$t>0$ の範囲で L の式を考えていきます。

実質の計算上は L^2 として，L^2 の最小値を求めれば解決です。
(このあたりの議論は少々五月蝿いものがありますので，$L=\sqrt{\cdots}$ として計算を進めて，中身が最小となるときを考える，といったように，『あくまで L を計算していますよ』感を出しながら進めていきます。)

計算を進めていく中で，2 乗につぐ 2 乗が現れますので，置き換えを駆使するなど出来る限り目に優しく処理したいところです。

置き換える際には，新たな変数の範囲にもきちんと気を配ります。

【解答】

$y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ に対して，$y'=\frac{1}{2}\cdot2x=x$

ゆえに，$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)$ における接線の式は $y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$

すなわち　$y=tx-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$ ⋯①

$t=0$ のとき，$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線の式は $y=\frac{1}{2}$ であり，x 軸と交わらないため，問題の条件に反する。

ゆえに，$t\neq0$ で，$y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ は y 軸対称であるため，$t>0$ において L の最小値を考えれば十分である。

$t>0$ のとき

① において，$y=0$ とすると $x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ であり，これが x 切片を与えるので，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ 0\right)$

ゆえに，
$$\begin{aligned}L&=\sqrt{\left\{t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}^2+\left\{\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)-0\right\}^2}\\&=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(t^2+1)\right\}^2}\\&=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}(t^2+1)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(t^2+1)\right\}^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}(t^2+1)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}(t^2+1)^2\cdot\frac{t^2+1}{t^2}}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{t^2}}\end{aligned}$$

ここで，$T=t^2$ とおくと，$L=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(T+1)^3}{T}}$　($T>0$)

ゆえに，$f(T)=\frac{(T+1)^3}{T}$ $(T>0)$ が最小になるときを考える。

$$\begin{aligned}f'(T)&=\frac{3(T+1)^2\cdot T-(T+1)^3}{T^2}\\&=\frac{(T+1)^2\{3T-(T+1)\}}{T^2}\\&=\frac{(T+1)^2(2T-1)}{T^2}\end{aligned}$$

ゆえに，

T	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(T)$		$-$	0	$+$
$f(T)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

という増減表を得る。

L は $T=\frac{1}{2}$（このとき $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で，$t>0$ より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$）のとき，

最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。⋯答

【総括】

方針として困ることはないため，実質的には計算面での勝負ということになるでしょう。

対称性から $t>0$ の範囲で考えましたが，実際は，$T=t^2$ とおいてしまうため，対称性を用いずに単純に $t\fallingdotseq 0$ として話を進めても，そこまで劇的に労力が変わるわけではありませんでした。
（ただ，対称性を活用しようという意識は大切です。）

また，$f(T)=\dfrac{(T+1)^3}{T}$ $(T>0)$ について，

$$\begin{aligned} f(T)&=\frac{T^3+3T^2+3T+1}{T}\\ &=T^2+3T+\frac{1}{T}+3 \end{aligned}$$

としてから微分してもよいでしょう。（仮分数から帯分数に直すというのはそれはそれでセオリーです。）

なお，

等号成立は $T=\dfrac{1}{2}$ のとき

等号成立は $4T=\dfrac{1}{T}$ かつ $T>0$ すなわち $T=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(T)=\left(T-\frac{1}{2}\right)^2+4T+\frac{1}{T}+\frac{11}{4}\geqq 4T+\frac{1}{T}+\frac{11}{4}\geqq 2\sqrt{4T\cdot\frac{1}{T}}+\frac{11}{4}=\frac{27}{4}$$

と見れば，$f(T)\geqq\dfrac{27}{4}$ $\left(\text{等号成立は } T=\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right)$ と 微分に頼らずに $f(T)$ の最小値が $\dfrac{27}{4}$ と得られますが，天下り的なものもあり，現実的ではないでしょう。

※ むしろ $T^2+3T+\dfrac{1}{T}+3$ という形から相加相乗平均に持ち込む策としては

$$\begin{aligned} T^2+3T+\frac{1}{3T}+\frac{1}{3T}+\frac{1}{3T}+3&\geqq 5\sqrt[5]{T^2\cdot 3T\cdot\frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{3T}}+3\\ &=5\sqrt[5]{\frac{1}{9}}+3 \end{aligned}$$

の方が有名ですが，等号成立条件が

$T^2=3T$ かつ $3T=\dfrac{1}{3T}$ であり，これを満たす T が存在せず

失敗します。

不等式から最大値や最小値を求める際には必ず等号成立条件に言及する必要があります。
0 点以上だからと言って最低点が 0 点とは限りませんし，100 点以下だからと言って最高点が 100 点とは限りません。