次の各問に答えよ。

問 1　xyz 空間の 3 点 A$(1, 0, 0)$，B$(0, -1, 0)$，C$(0, 0, 2)$ を通る平面 α に関して点 P$(1, 1, 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし，点 Q が平面 α に関して点 P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。

問 2　赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。

＜ '21 京都大 ＞

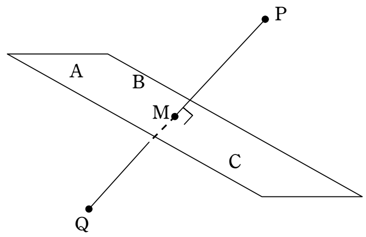
問 1【戦略】

(解 1) ではベクトルを用いていきますが，京大は平面の方程式が許容範囲内であることも考えて，(解 2) では平面の方程式で考えていきたいと思います。

問 1【解答】

Q(X, Y, Z) とおく。

線分 PQ の中点を M とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}X+1\\Y+1\\Z+1\end{pmatrix}\ \cdots(☆)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X-1\\Y-1\\Z-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\alpha$ なので，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-(X-1)-(Y-1)=-X-Y+2$ であり，$-X-Y+2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-(X-1)+2(Z-1)=-X+2Z-1$ であり，$-X+2Z-1=0$

ゆえに，

$$\begin{cases}Y=-X+2\ \cdots①\\X=2Z-1\ \cdots②\end{cases}$$

② を ① に代入して，

$$\begin{aligned}Y&=-(2Z-1)+2\\&=-2Z+3\ \cdots③\end{aligned}$$

これより，Q の座標はあらためて $(2Z-1, -2Z+3, Z)$ とおきなおせる。

(☆) より，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2Z\\-2Z+4\\Z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z\\-Z+2\\\frac{Z+1}{2}\end{pmatrix}\ \cdots④$

一方，M は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ によって張られる平面 α 上にあるため，
実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。

これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-s-t\\-s\\2t\end{pmatrix}\ \cdots⑤\end{aligned}$$

④，⑤ より，$\begin{cases}1-s-t=Z\ \cdots⑥\\-s=-Z+2\ \cdots⑦\\2t=\frac{Z+1}{2}\ \cdots⑧\end{cases}$

⑦ より，$s=Z-2$

⑧ より $t=\frac{Z+1}{4}$

これらを ⑥ に代入して，$1-(Z-2)-\frac{Z+1}{4}=Z$

これより，$Z=\frac{11}{9}$ を得る。

このとき，②，③ から $X=\frac{13}{9}$，$Y=\frac{5}{9}$

よって，Q$\left(\frac{13}{9}, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right)$ …答

問 1【戦略 2】

平面 α の方程式を前面に出していいのであれば，「M が α 上にある」ということが翻訳しやすくなります。

その中でも

法線ベクトルを用いて平面の方程式を求める方針

法線ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ をもち，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る平面の方程式が

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

であることを利用する

3 点の通過点条件から，$ax+by+cz+d=0$ と置く方針

α の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおいて，

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ -1,\ 2),\ (0,\ 0,\ 2)$ を代入する

という方針が考えられます。

問 1【解 2】

$\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 1=0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=(-1)\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 2=0$$

であり，平面 α の法線ベクトルの 1 つとして $\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がある。

ゆえに，平面 α の方程式は

$2(x-1)-2y+z=0$，すなわち $2x-2y+z=2$ $\cdots(*)$

線分 PQ の中点を M とすると，実数 t を用いて $\overrightarrow{PM}=t\vec{n}$ と表すことができる。

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+t\vec{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

となり，M は平面 α 上にあるため，$(*)$ から

$2(2t+1)-2(-2t+1)+(t+1)=2$ を満たし，$t=\dfrac{1}{9}$ を得る。

ゆえに，$\overrightarrow{PM}=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ であり，$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PM}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\\&=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} \frac{13}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$Q\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$ …答

問 1【解 3】～部分的別解～

平面 α の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく。

A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通るという条件から

$\begin{cases} a+d=0 \\ -b+d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases}$ より，$a=-d$，$b=d$，$c=-\dfrac{d}{2}$

よって，$-dx+dy-\dfrac{d}{2}z+d=0$，すなわち $2dx-2dy+dz-2d=0$ となるが，今 $d=0$ とすると

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0$$

となり，これを満たす $(x,\ y,\ z)$ は全ての空間内の点であり，平面を表さず不合理となるため，$d\neq 0$

ゆえに，平面 α の方程式は $2x-2y+z=2$

$\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると平面 α 上の点 A$(1,\ 0,\ 0)$，X$(x,\ y,\ z)$ に対して

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AX}&=2(x-1)-2y+z\\&=2x-2y+z-2\\&=0\end{aligned}$$

となり，$\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，平面 α の法線ベクトルになっている。

（以下【解 2】に準じる）

問 2 【戦略】

$n-1$ 回目までに

$$\begin{cases}\textbf{赤が 1 回も出ない}\\ \textbf{白，青，黄 がどれも少なくとも 1 回は出ている}\end{cases}$$

という事象が起こり，n 回目に赤が出ると繋いでいけばよいでしょう。

【解答】

$n-1$ 回目までに

$$\begin{cases}\text{赤玉が 1 回も出ない}\\ \text{白玉，青玉，黄玉 が少なくとも 1 回は出ている}\end{cases}$$

という確率を求める。

まず，赤玉が 1 回も出ないような取り出し方は

毎回 白玉，青玉，黄玉 の 3 通りの取り出し方があり，3^{n-1} 通り。

ただし，この中には $\begin{cases}\text{全て同じ色が出る} \cdots ①\\ \text{2 色のみが出る} \cdots ②\end{cases}$ が含まれているので，それを除く必要がある。

＜① の場合＞

全て青玉，全て白玉，全て黄玉 という 3 通り

＜② の場合＞

2 色の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2=3$（通り）（この 2 色を A，B とする）

$n-1$ 回は A，B の 2 通りを取るので，2^{n-1} 通り

ただし，すべて A を取る，すべて B を取るという 2 通りは ① に含まれてしまうので除く。

よって，② の場合の数は $3(2^{n-1}-2)=3\cdot2^{n-1}-6$

ゆえに，$n-1$ 回目までに

$$\begin{cases}\text{赤玉が 1 回も出ない}\\ \text{白玉，青玉，黄玉 が少なくとも 1 回は出ている}\end{cases}$$

となる確率は $\dfrac{3^{n-1}-\{3+(3\cdot2^{n-1}-6)\}}{4^{n-1}}=\dfrac{3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+3}{4^{n-1}}$

このとき n 回目に赤を取ればよく，求める確率は

$$\frac{3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\times\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+3}{4^{n}} \cdots \text{答}$$

【総括】

問 1 については今回の通過点が x 軸，y 軸，z 軸上にあるため $ax+by+cz+d=0$ と設定するのが楽かもしれません。

スムーズに平面の方程式から法線ベクトルを読み取りたいところです。

問 2 については京大を本気で目指すつもりであれば落とすことは許されないレベルと言ってもいいでしょう。

京大は 2008 年に

正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A，B，C，D の全てに点 P が現れる確率を求めよ。

という出題をしていますが，解いている最中，ふっとこの問題が頭をよぎりました。