以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n，k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で，${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

＜ ’21 九州大 ＞

【戦略 1】

(1)
$$ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ {}_n\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{n-2},\ {}_n\mathrm{C}_{n-1} $$

と ${}_n\mathrm{C}_1(=n)$，${}_n\mathrm{C}_{n-1}(=n)$ も含めれば

$$ {}_n\mathrm{C}_1 < {}_n\mathrm{C}_2 < {}_n\mathrm{C}_3 < \cdots\cdots < {}_n\mathrm{C}_N \geqq {}_n\mathrm{C}_{N+1} > {}_n\mathrm{C}_{N+2} > \cdots\cdots > {}_n\mathrm{C}_{n-2} > {}_n\mathrm{C}_{n-1} $$

と，なるような N が存在し，n からスタートして増加し，その後減少して n で終わるわけですから，題意の主張は当然です。

ただ，感覚的に訴える部分が多く，証明としては「いや，そこを示すのが趣旨でしょ」となりかねません。

誰が見てもぐうの音が出ない形で証明するためには式で勝負します。

上のようなイメージを式的に保証します。

${}_n\mathrm{C}_k$ と ${}_n\mathrm{C}_{k+1}$ の大小を比較しようというイメージのもと

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k} \gtreqless 1$ を考えていきます。

確率の最大というテーマでよく用いる考え方です。

k が $2 \leqq k \leqq n-2$ という範囲なのですが，みみっちいことを言わずに，${}_n\mathrm{C}_k$ が定義できる範囲で考えていきます。

$$ {}_4\mathrm{C}_0 < {}_4\mathrm{C}_1 < {}_4\mathrm{C}_2 > {}_4\mathrm{C}_3 > {}_4\mathrm{C}_4 $$

$$ {}_5\mathrm{C}_0 < {}_5\mathrm{C}_1 < {}_5\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_3 > {}_5\mathrm{C}_4 > {}_5\mathrm{C}_5 $$

と，n の偶奇によって等号が入るか入らないかが変わってきますので n の偶奇で場合分けしながら証明していきたいと思います。

(2) **直感的には「${}_p\mathrm{C}_1 = p$，${}_p\mathrm{C}_{p-1} = p$ しかなさそうだな」という予想を立てないと身動きがとれません。**

${}_n\mathrm{C}_2$ 〜 ${}_n\mathrm{C}_{n-2}$ は素数にならなさそうだなと懐疑的に見ます。

この中の ${}_n\mathrm{C}_k$ が素数 p であったとすると，(1) から $p > n$ なのですが一方で，$\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = p$ ということから，$n!$ が素因数 p をもつことになります。

数直線的に考えると

となり，「$n!$ が素因数 p をもつわけないな」と気付けるでしょう。

【解 1】

(1) k が $2 \leqq k \leqq n-2$ を満たす自然数として存在するためには $n \geqq 4$ が必要である。

$$ \frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1} $$

(i) $n = 2m$ $(m = 2, 3, \cdots)$ のとき

$$ \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m}\mathrm{C}_k} = \frac{2m-k}{k+1} $$

(i−1) $\dfrac{{}_{2m}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m}\mathrm{C}_k} > 1$ のとき

$\dfrac{2m-k}{k+1} > 1$ より，$2m-k > k+1$ で，$k < m - \dfrac{1}{2}$

(i−2) $\dfrac{{}_{2m}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m}\mathrm{C}_k} < 1$ のとき

$\dfrac{2m-k}{k+1} < 1$ より，$2m-k < k+1$ で，$k > m - \dfrac{1}{2}$

(i−1)，(i−2) より

$k = 0, 1, \cdots, m-1$ に対して，${}_{2m}\mathrm{C}_k < {}_{2m}\mathrm{C}_{k+1}$
$k = m, m+1, \cdots, 2m-1$ に対して，${}_{2m}\mathrm{C}_k > {}_{2m}\mathrm{C}_{k+1}$

これより，

$$ {}_{2m}\mathrm{C}_0 < {}_{2m}\mathrm{C}_1 < {}_{2m}\mathrm{C}_2 < \cdots\cdots < {}_{2m}\mathrm{C}_{m-1} < {}_{2m}\mathrm{C}_m $$

$$ {}_{2m}\mathrm{C}_m > {}_{2m}\mathrm{C}_{m+1} > {}_{2m}\mathrm{C}_{m+2} > \cdots\cdots > {}_{2m}\mathrm{C}_{2m-2} > {}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1} > {}_{2m}\mathrm{C}_{2m} $$

ゆえに，$2 \leqq k \leqq 2m-2$ において

${}_{2m}\mathrm{C}_k > {}_{2m}\mathrm{C}_1 \,(= {}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1})$，すなわち ${}_{2m}\mathrm{C}_k > 2m$

(ii) $n = 2m+1$ $(m = 2, 3, \cdots)$ のとき

$$ \frac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_k} = \frac{2m+1-k}{k+1} $$

(ii−1) $\dfrac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_k} > 1$ のとき

$\dfrac{2m+1-k}{k+1} > 1$ より，$2m+1-k > k+1$ で，$k < m$

(ii−2) $\dfrac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_k} = 1$ のとき

$\dfrac{2m+1-k}{k+1} = 1$ より，$2m+1-k = k+1$ で，$k = m$

(ii−3)　$\dfrac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k}}<1$ のとき

$$\frac{2m+1-k}{k+1}<1 \text{ より，} 2m+1-k<k+1 \text{ で，} k>m$$

(ii−1)，(ii−2)，(ii−3) より

$k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$ に対して，${}_{2m+1}\mathrm{C}_k<{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}$
$k=m$ に対して，${}_{2m+1}\mathrm{C}_k={}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}$
$k=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ 2m$ に対して，${}_{2m+1}\mathrm{C}_k>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{k+1}$

これより，

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_0<{}_{2m+1}\mathrm{C}_1<{}_{2m+1}\mathrm{C}_2<\cdots\cdots<{}_{2m+1}\mathrm{C}_{m-1}<{}_{2m+1}\mathrm{C}_m$$

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_m={}_{2m+1}\mathrm{C}_{m+1}$$

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_{m+1}>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{m+2}>\cdots\cdots>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m-2}>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m-1}>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m}>{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m+1}$$

ゆえに，$2\leqq k\leqq(2m+1)-2$ において

${}_{2m+1}\mathrm{C}_k>{}_{2m+1}\mathrm{C}_1\ (={}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m})$，　すなわち ${}_{2m+1}\mathrm{C}_k>2m+1$

以上 (i)，(ii) より，n の偶奇によらず $2\leqq k\leqq n-2$ を満たす自然数 k に対して

$${}_n\mathrm{C}_k>n$$

であることが示された。

(2)　(i)　$k=n$ のとき，${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_n=1$ で素数とならない。

(ii)　$k=1,\ n-1$ のとき，${}_n\mathrm{C}_1={}_n\mathrm{C}_{n-1}=n$

題意を満たすには，$n=p$ で，$(n,\ k)=(p,\ 1),\ (p,\ p-1)$

(iii)　$2\leqq k\leqq n-2$ のとき

${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!}$ で，${}_n\mathrm{C}_k=p$ となるとき，

$$\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!}=p$$

$$n\,!=p\cdot(k\,!)\cdot(n-k)!$$

これより，$n\,!$ は素因数 p を含むことになる。

ゆえに，p が素数であるので，$n\geqq p$ となる

なぜなら，$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p-1$ までに素因数 p を含むものは存在しないため，$n<p$ と仮定すると $n\,!$ に素因数 p が含まれず矛盾してしまう。

これより，

$$\begin{aligned}n&\geqq p\\&={}_n\mathrm{C}_k\\&>n\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

となり，不合理。

(i)，(ii)，(iii) より，${}_n\mathrm{C}_k=p$ (p は素数) を満たす自然数の組 $(n,\ k)$ は

$(n,\ k)=(p,\ 1),\ (p,\ p-1)$ … 答

【戦略 2】(1) について

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{k\,!}\\&=n\cdot\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n-(k-1)}{2}\end{aligned}$$

と，$n\times\boxed{\text{——}\times\text{——}\times\cdots\times\text{——}}$ **という形で見ます。**

このとき，　この部分　が 1 より大きい理由を探しに行きます。

スタートの $\dfrac{n-1}{k}$ **で (分子)＞(分母) であれば**

1 減る　1 減る　1 減る

$$\frac{n-1}{k}\qquad\frac{n-2}{k-1}\qquad\frac{n-3}{k-2}\qquad\frac{n-4}{k-3}$$

1 減る　1 減る　1 減る

と，これ以降，分母と分子の大小関係は (分子)＞(分母) のままです。

あとはこれを数式的にまとめていきます。

【解 2】(1) 別解

(1)　k が $2\leqq k\leqq n-2$ を満たす自然数として存在するためには $n\geqq4$ が必要である。

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{k\,!}\\&=n\cdot\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n-(k-1)}{2}\end{aligned}$$

$2\leqq k\leqq n-2$ より，$k<n-1$ である。

両辺 j を引くと，$k-j<n-1-j$

$k-j>0$，すなわち $j<k$ のとき，

$$\frac{n-1-j}{k-j}>1$$

これより，$\dfrac{n-1}{k}>1,\ \dfrac{n-2}{k-1}>1,\ \cdots\cdots,\ \dfrac{n-k+1}{2}>1$

ゆえに，${}_n\mathrm{C}_k>n\quad(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$ が示された。

【総括】

中々香ばしい匂いを感じる問題でしょう。

ただ，いざ食してみると中々前に進めなかったかもしれません。

(1) の主張は当たり前と言えば当たり前です。

この「当たり前の証明」はこの問題に限らず，何を自明として認めてよいのかという点で判断に迷う部分はあります。

今回は比較的数式としてはっきりと証明できるので，その点がまだ救いでしょうか。

【解 1】の隣接 2 項比較の方針は確率の最大 $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ を考える定番のテーマを応用しました。

$$ {}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ {}_n\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{n-2},\ {}_n\mathrm{C}_{n-1},\ {}_n\mathrm{C}_n $$

増加　　　　**減少**

というイメージがあったからこそピンとくるものがあったわけです。

【解 2】の ${}_n\mathrm{C}_k$ を書き下す方針はストレートです。ただ九州大受験生と言えど，数学に苦手意識があると文字に溺れやすく，見えるものが見えなくなってしまう人が出てくるかもしれません。

一般的に，二項係数は $\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!}$ や $\dfrac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\,!}$ など様々な見方があり，迷いが生じやすいし，試行錯誤が必要で時間がかかることもあり，難問になりやすいですね。