

2021 年度 九州大学 理系 第4問

自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) に対して, 2つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

を考える。 α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の2点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき,

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし, i は虚数単位とする。

(1) $n=2$ のとき, どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha=1-i, \beta=1+i, f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が平均値の性質をもつための, 実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha=\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x)=x^7$ は, 平均値の性質をもたないことを示せ。

< '21 九州大 >