自然数 n と実数 a_0，a_1，a_2，……，a_n $(a_n \fallingdotseq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$$

を考える。α，β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α，β を結ぶ線分上にある点 γ で

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき，

α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $n=2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha=1-i$，$\beta=1+i$，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が平均値の性質をもつための，実数 a，b，c に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x)=x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

＜ ’21 九州大 ＞

【戦略】

平均値の性質をもつとは $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ となる γ が存在するという「存在」に関する命題です。

(1) で最終的に示すべきは

どんな α，β に対しても，うまく γ をもってくれば $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ とすることができる。

ということです。

どんな γ をもってこればよいかについては $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ と $f'(\gamma)$ をそれぞれ計算して見比べれば，逆算的に $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ともってくればよいことが分かると思います。

(2) は α，β が具体的になりました。これにより，$\gamma=1+ti\ (-1\leqq t\leqq 1)$ と設定可能なので，このもとで，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ と $f'(\gamma)$ をそれぞれ計算していきます。

もし，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ が成り立つなら何が言えればよいのか

逆にそれが言えるのなら，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ が成り立つのか

という 2 方向考えないといけません。(必要十分条件を求めるということをお忘れなく)

(3) は最終的に $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ となる γ が存在しないことを言えばよいことになります。

否定的な命題の証明ということであり，背理法で考えていきます。

【解答】

(1) $n=2$ のとき $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，$f'(x)=2a_2x+a_1$

このとき，

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{(a_2\beta^2+a_1\beta+a_0)-(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{a_2(\beta^2-\alpha^2)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{a_2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

α，β は異なる複素数であるという条件から $\beta-\alpha \fallingdotseq 0$ であり

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\alpha+\beta)+a_1 \cdots ①$$

ここで，複素数平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して，線分 AB の中点を $\mathrm{M}(\gamma)$ とすると，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\begin{aligned}f'(\gamma)&=2a_2\gamma+a_1\\&=2a_2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+a_1\\&=a_2(\alpha+\beta)+a_1 \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ が成立する。

つまり，どのような α，β に対しても，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ と定めることで $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ を満たす γ を見出すことができる。

以上から，題意は示された。

(2) 複素数平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して，線分 AB 上の点 $\mathrm{C}(\gamma)$ を考える。

この $\alpha=1-i$，$\beta=1+i$ であるので，γ の実部は 1 であるから

$\gamma=1+ti\ (-1\leqq t\leqq 1)$ とおくことができる。

さて，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)-(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{(\beta^3-\alpha^3)+a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+a(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b$$

今，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$ のとき，$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=2\end{cases}$ なので，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$

ゆえに，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=2a+b+2 \cdots ③$$

一方，

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= 3\gamma^2+2a\gamma+b \\ &= 3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b \\ &= 3(1+2ti-t^2)+2a(1+ti)+b \\ &= \{3(1-t^2)+2a+b\}+2t(a+3)i \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

$f(x)$ は実数係数の多項式であり，a，b，c は実数。

さらに，t も実数。

以下，

α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ $\Longrightarrow$ $a=-3$ かつ b，c は任意 …(☆)

$a=-3$ かつ b，c は任意 $\Longrightarrow$ α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ …(★)

を示す。

＜(☆) の証明＞

α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつとき，a，b，t が実数であることから ③，④ より

$$\begin{cases} 3(1-t^2)+2a+b=2a+b+2 & \cdots ⑤ \\ 2t(a+3)=0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

を満たす実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ に存在する。

⑤ を整理すると，$t^2=\dfrac{1}{3}$ であり，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，$-1 \leqq t \leqq 1$

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（$\neq 0$）であること，及び ⑥ より，$a=-3$ であり，
b，c についての条件はない。

ゆえに，(☆) が示された。

＜(★) の証明＞

$a=-3$ のとき，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と定めれば，

③ より，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=b-4$

④ より，$f'(\gamma)=b-4$

となり，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$

つまり，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$，$f(x)=x^3-3x^2+bx+c$ に対して

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ となるような $\gamma\left(\text{具体的には } 1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)$ が存在する。

これは，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$，$f(x)=x^3-3x^2+bx+c$ が平均値の
性質をもつことを意味する。

ゆえに，(★) が示された。

以上から，求める必要十分条件は $a=-3$ かつ b，c は任意の実数

すなわち，$\boldsymbol{a=-3}$ … 答

(3)　$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned} \alpha^7 &= \cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) \\ &= \cos\left(-\frac{7}{4}\pi+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi+2\pi\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^7 &= \cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi \\ &= \cos\left(\frac{7}{4}\pi-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi-2\pi\right) \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$f(x)=x^7$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} &= \frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

α，β は異なる複素数であるという条件から $\beta-\alpha \neq 0$ であり

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=-1 \quad \cdots (*)$$

このとき，複素数平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して，
線分 AB 上の点 $\mathrm{C}(\gamma)$ を考える。

ここで，α，β，$f(x)$（$=x^7$）が平均値の性質をもつと仮定する。

このとき，$(*)$ も考えると，$f'(\gamma)=-1$ を満たす γ が存在する。

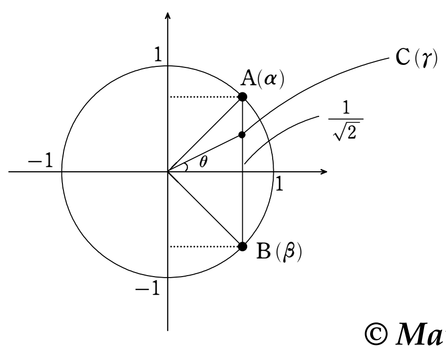
$f'(x)=7x^6$ であるので，$f'(\gamma)=7\gamma^6$

つまり，$7\gamma^6=-1$ となる γ が存在することになる。

ここで，γ を極形式で表し，$\gamma=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表す。

6 乗計算するにあたり
$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+ui\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq u \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
と設定するよりは極形式の方がいいでしょう。

（ただし，R，θ は $\begin{cases} R\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ を満たす。）



ド・モアブルの定理より，$\gamma^6=R^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$

$$7\gamma^6=7R^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$$

一方，$-1=\cos\pi+i\sin\pi$ であり，$7\gamma^6=-1$ なので，

$$\begin{cases}7R^6=1\\6\theta=\pi+2m\pi\end{cases}\quad(m \text{ は整数})$$

このとき，$\theta=\dfrac{\pi+2m\pi}{6}$ であり，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であることから

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi+2m\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で整理すると，$-\dfrac{5}{4}\leqq m\leqq\dfrac{1}{4}$ を得る。

これを満たす整数 m は $m=-1,\ 0$

ゆえに，$(m,\ \theta)=\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(-1,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$

このとき，$\cos\theta=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$R\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で，$R=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

これより，$7R^6=7\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^6=\dfrac{7\cdot 6^3}{3^6}$ を得るが，これは $7R^6=1$ であることに矛盾する。

ゆえに，α，β，$f(x)\ (=x^7)$ は平均値の性質をもたない

【総括】

a，b を実数として $f(x)$ が $a\leqq x\leqq b$ で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる c が a，b の間に存在する。

という「平均値の定理」を彷彿とさせます。

一般の関数だと定義域を複素数にもってくるのは複素関数ということになってしまうので，定義域が複素数でも扱える多項式を題材にして
「同じようなことが複素数でも言えるでしょうか」という問題でしょう。

(1) は平均値の性質を確実にもつ

(2) は条件付きで平均値の性質をもつ

(3) は平均値の性質をもたない

と (1)，(2)，(3) できれいに分かれています。

聞きなれない言葉に圧倒されず，それぞれのケースで何が言えればよいのかということを見失わないようにしたいところです。