座標平面上の点 (x, y) について，次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leqq e^t - xt$ が成立する。…… $(*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

(1) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) のうち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

＜ '21 九州大 ＞

【戦略】

(1) **全ての実数 t に対して $e^e - xt - y \geqq 0$ となる x，y の条件を求めて領域を図示することになります。**

これについては「絶対不等式」の処理として考えます。

全ての実数 t について考えるので，定義域は全実数で考えます。

$f(t) = e^t - xt - y$ とおいたとき，$f(t)$ の最小値が 0 以上と翻訳すればよいでしょう。

「一番弱いやつでも 0 に勝ってれば，その他の連中もみんな 0 に勝ってるでしょ」という理論です。

$f(t)$ の最小値を考えるにあたっては，$f'(t)$ の符号によるところが大きく，グラフの上下で $f'(t)$ の符号を判断することを考えれば $x > 0$ か $x \leqq 0$ かで場合分けがあります。

$x \leqq 0$ のときに $f(t)$ が単調増加であることは確定なのですが，最小値を出すにあたって，$x = 0$ か $x < 0$ かでさらに場合分けがあることに注意します。

(2) **(1) の図示がきちんとできていれば，どの部分の x 軸回転体かを把握するのは容易です。**

$\int_1^e \pi y^2 \, dx$ という x 軸回転体の体積を求める式で，積分計算していく計算勝負ということになります。

その際，$\int_1^e x^2 dx$，$\int_1^e x^2 \log x \, dx$，$\int_1^e x^2 (\log x)^2 dx$ を計算することになりますが，前から順に計算していくと，前の計算結果を拝借することができ，要領がいいと思います。

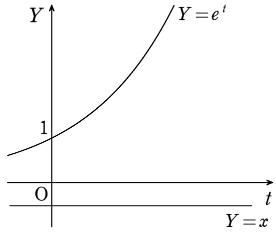
【解答】

(1) $f(t) = e^t - xt - y$ とすると，$f'(t) = e^t - x$

与えられた条件より，「全ての実数 t に対して $f(t) \geqq 0$ となる」ための x，y の満たすべき条件を考える。

$Y = e^t$ のグラフと，$Y = x$ のグラフを tY 平面上にかき，その上下によって $f'(t)$ の符号を判定する。

(i) $x < 0$ のとき



$f'(t) > 0$ となり，$f(t)$ は単調増加。

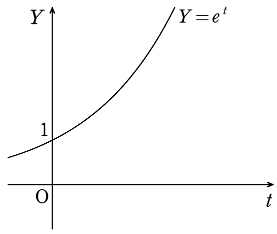
t	$(-\infty)$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$

$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{s \to \infty} (e^{-s} + xs - y) = -\infty$ ($x < 0$ に注意)

ゆえに，全ての実数 t に対して $f(t) \geqq 0$ となることはない。

(ii) $x = 0$ のとき

$f'(t) = e^t > 0$ となり，$f(t)$ は単調増加。



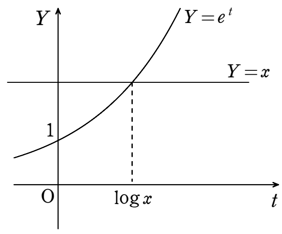
t	$(-\infty)$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$
$f(t)$	$-y$	$\nearrow$

$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{s \to \infty} (e^{-s} - y) = -y$

ゆえに，$-y \geqq 0$， すなわち $y \leqq 0$ となれば，全ての実数 t に対して $f(t) \geqq 0$ となる。

(iii) $x > 0$ のとき

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$x - x\log x - y$	$\nearrow$



ゆえに，$x - x\log x - y \geqq 0$

すなわち，$y \leqq x - x\log x$

以上 (i)，(ii)，(iii) から，条件 $(*)$ を満たすような x，y の条件は

$$\begin{cases} x = 0 \text{ かつ } y \leqq 0 \\ x > 0 \text{ かつ } y \leqq x - x\log x \end{cases} \quad \cdots (☆)$$

これを図示するにあたって，$g(x)=x-x\log x\ \ (x>0)$ のグラフについて考える。

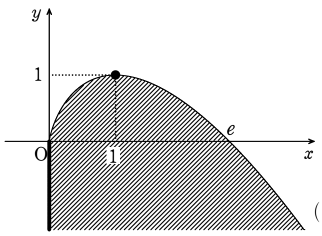
$$g'(x)=1-\left\{1\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right\}$$
$$=-\log x$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

※ $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}(x-x\log x)$
$\displaystyle=0\ \left(問題文にある\lim_{x\to+0}x\log x=0 を用いた\right)$

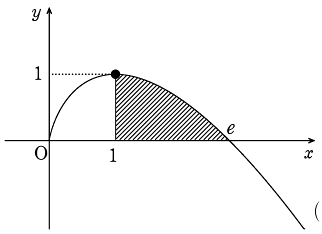
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}x(1-\log x)=-\infty$

以上から，条件 $(*)$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合，すなわち (☆) を満たすような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示すると，以下の (図 1) のようになる。(境界線を含む)



(図 1)

(2)　以下の (図 2) の斜線部分の x 軸回転体の体積を求めればよい。



(図 2)

求める体積を V とする。

$$V=\int_1^e \pi y^2\,dx$$
$$=\pi\int_1^e\{x^2-2x^2\log x+x^2(\log x)^2\}\,dx$$

ここで，$I_1=\int_1^e x^2\,dx$，$I_2=\int_1^e x^2\log x\,dx$，$I_3=\int_1^e x^2(\log x)^2\,dx$

とおく。

$$I_1=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e=\frac{e^3-1}{3}$$

$$I_2=\int_1^e\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}I_1$$
$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3-1}{9}$$
$$=\frac{2e^3+1}{9}$$

$$I_3=\int_1^e\left(\frac{1}{3}x^3\right)'(\log x)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{3}x^3\right)\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{e^3}{3}-\int_1^e\frac{2}{3}x^2\log x\,dx$$
$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}I_2$$
$$=\frac{e^2}{3}-\frac{4e^3+2}{27}$$
$$=\frac{5e^3-2}{27}$$

$$V=\pi(I_1-2I_2+I_3)$$
$$=\pi\left(\frac{e^3-1}{3}-\frac{4e^3+2}{9}+\frac{5e^3-2}{27}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{2e^3-17}{27}\pi}\ \cdots 答$$

【総括】

絶対不等式の処理として最小値に注目する定番の考え方です。

絶対不等式としての捉え方

$x\leqq a$ や $x\geqq b$ など，どのタイプの範囲でも同じです

$f(x)\leqq c$ が $a\leqq x\leqq b$ において常に成り立つ

$\Leftrightarrow$

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大値 M について，$M\leqq c$

(その範囲の最強が負けるんだったら他の連中も負ける)

$f(x)\geqq c$ が $a\leqq x\leqq b$ において常に成り立つ

$\Leftrightarrow$

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最小値 m について，$m\geqq c$

(その範囲の最弱が勝てるんだったら他の連中も勝てる)