θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

＜ ’21 九州大 ＞

【戦略】

(1) **判別式をとるだけなので，三角関数の不等式を処理するだけです。**

(2) **まずは今回の α，β が共役な複素数の関係であることを見抜きたいところです。**

そうなると，題意の外接円の中心 $\mathrm{C}(\gamma)$ は実軸にあることも分かります。

後は，$|\gamma|=|\gamma-\alpha|$ ということを処理していきます。

これについては基本事項 $|z|^2=z\overline{z}$ を使いながらほぐしていくことになります。

途中 γ が実数であるということ（数式的には $\gamma=\overline{\gamma}$ であること）が効いてきます。

これにより，$(\alpha+\overline{\alpha})\gamma=\alpha\overline{\alpha}$ を得ますが，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ については α，$\overline{\alpha}$ が元々 $(*)$ という 2 次方程式から得られる 2 解であることから解と係数の関係で仕留めればおしまいです。

(3) **様々な翻訳があるでしょうが，**

α の実部が γ である

とやるのがストレートでしょうか。

一般に，複素数 z の実部は $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ で与えられます。

そこで，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\gamma$ で，(2) で求めることになる $\gamma=\dfrac{1}{4\sin\theta}$ と，解と係数の関係から得られる $\alpha+\overline{\alpha}=4\cos\theta$ を代入すれば

$2\cos\theta=\dfrac{1}{4\sin\theta}$ **で，$8\sin\theta\cos\theta=1$ を得ます。**

ここから，$\tan\theta$ を出そうと思ったら，両辺 $\cos^2\theta$ で割れば

$8\tan\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $(=1+\tan^2\theta)$ **なので，2 次方程式を解けば**

$\tan\theta=4\pm\sqrt{15}$ **を得ます。**

そもそもが $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ で考えているので，$\tan\theta=4+\sqrt{15}$ は 1 を超えてしまっており，明らかに不適です。

$\tan\theta=4-\sqrt{15}$ **については，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲では大丈夫なのですが，(1) から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ というもっと厳しい範囲で考えねばならないため $0<4-\sqrt{15}<\tan\dfrac{\pi}{12}$ $(=2-\sqrt{3})$ であることを示す必要が出てきます。**

【解答】

(1) $(*)$ の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}<0$ となればよい。

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{-(2\cos\theta)\}^2-1\cdot\frac{1}{\tan\theta}\\&=4\cos^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\\&=4\cos^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta\,(4\cos\theta\sin\theta-1)}{\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta\,(2\sin2\theta-1)}{\sin\theta}\end{aligned}$$

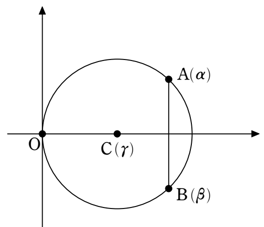
$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ では $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ なので，$2\sin2\theta-1<0$

すなわち，$\sin2\theta<\dfrac{1}{2}$

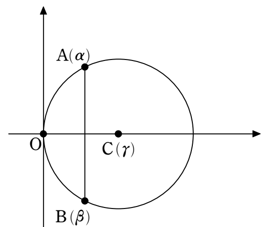
$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$ で，$\boldsymbol{0<\theta<\dfrac{\pi}{12}}$ … 答

(2) $(*)$ は実数係数の 2 次方程式であるため，$\beta=\overline{\alpha}$ である。

したがって，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して，線分 AB の垂直二等分線は実軸ということになり，△OAB の外接円の中心 C は実軸上にあるため，γ は実数である。（(図 1)，(図 2) 参照）



(図 1)



(図 2)

$|\gamma|=|\gamma-\alpha|$ より，$|\gamma|^2=|\gamma-\alpha|^2$

$\gamma\overline{\gamma}=(\gamma-\alpha)\overline{(\gamma-\alpha)}$

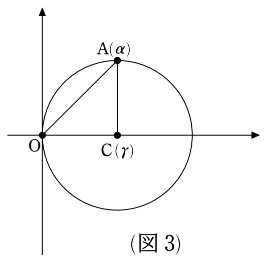
γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ に注意すると，$\gamma^2=(\gamma-\alpha)(\gamma-\overline{\alpha})$

これを展開して整理すると $(\alpha+\overline{\alpha})\gamma=\alpha\overline{\alpha}$

α，$\beta\,(=\overline{\alpha})$ は $(*)$ の解なので，解と係数の関係から

$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=4\cos\theta\\ \alpha\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\tan\theta}\left(=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\end{cases}$ であり，$\boldsymbol{\gamma=\dfrac{1}{4\sin\theta}}$ … 答

(3)　$\triangle \mathrm{OAC}$ は $\angle \mathrm{OCA}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形となる。((図 3) 参照)



(図 3)

α の実部は $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=2\cos\theta$ であるので，$2\cos\theta=\gamma$ であり，(2) から

$$2\cos\theta=\frac{1}{4\sin\theta}$$

$$8\sin\theta\cos\theta=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\theta \fallingdotseq 0$ であり，両辺 $\cos^2\theta$ で割ると

$$8\tan\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$8\tan\theta=1+\tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta-8\tan\theta+1=0$$

これより，$\tan\theta=4\pm\sqrt{15}$ を得る。

(1) より $0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ であるため，$0<\tan\theta<\tan\dfrac{\pi}{12}$ …(☆)

$\tan\theta=4+\sqrt{15}$ は $\tan\theta>\tan\dfrac{\pi}{4}(=1)>\tan\dfrac{\pi}{12}$ となり，不適。

$\tan\theta=4-\sqrt{15}$ が (☆) を満たしているかを確認する。

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{12}&=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\\&=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\sqrt{2.89}<\sqrt{3}<\sqrt{3.24}$ であるため，$1.7<\sqrt{3}<1.8$ であり，

$$0.2<2-\sqrt{3}<0.3,\ \text{すなわち},\ 0.2<\tan\frac{\pi}{12}<0.3\ \cdots ①$$

一方，$\sqrt{14.44}<\sqrt{15}<\sqrt{15.21}$ であるため，$3.8<\sqrt{15}<3.9$ であり，

$$0.1<4-\sqrt{15}<0.2,\ \text{すなわち}\ 0.1<\tan\theta<0.2\ \cdots ②$$

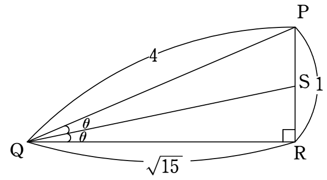
①，② より，$\tan\theta=4-\sqrt{15}$ は (☆) を満たしている。

以上から，求める $\tan\theta$ の値は $\boldsymbol{\tan\theta=4-\sqrt{15}}$ …答

【戦略 2】(3) 部分的別解

$8\sin\theta\cos\theta=1$ を得た後ですが，$4\sin2\theta=1$ として，$\sin2\theta=\dfrac{1}{4}$ として見ます。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ の範囲では $0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$ であり



という直角三角形を考えることが可能です。

$\tan\theta$ が欲しければ，図の線分 SR の長さが求まれば解決です。

そして，それについては内角の二等分線の性質から

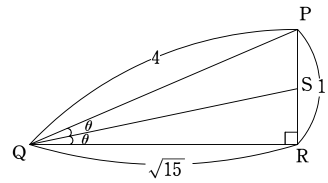
$\mathrm{PS}:\mathrm{SR}=4:\sqrt{15}$ であることから，$\mathrm{SR}=1\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}$ と求まります。

【解 2】(3) 部分的別解

$8\sin\theta\cos\theta=1$ より，$4\sin2\theta=1$ で，$\sin2\theta=\dfrac{1}{4}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$，すなわち $0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$ の範囲では $0<\sin2\theta<\dfrac{1}{2}$ なので

$\sin2\theta=\dfrac{1}{4}$ となる θ は確かに存在し，その θ は以下の (図 4) のような直角三角形の中に現れる。



(図 4)

(図 4) において，内角の二等分線の性質から $\mathrm{PS}:\mathrm{SR}=4:\sqrt{15}$

$$\mathrm{SR}=1\cdot\frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}$$

ゆえに，求める $\tan\theta$ は

$$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{15}}$$

$$=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$$

$$=\ \boldsymbol{4-\sqrt{15}}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

2 次方程式，三角関数，複素数平面 など各分野の基本事項を試す教育的な問題に感じました。

最後の (3) の $\tan\theta$ が $0<\tan\theta<\tan\dfrac{\pi}{12}$ を満たしているかどうかのチェックについては，わざわざ (1) という設問がある意味も考えると出題側は「チェックしろ」と思っているのでしょう。

数式的にチェックするのが億劫であれば【戦略 2】のように幾何的に処理してしまうのも一つの手です。