座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2) 中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき, その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

＜ '21 九州大 ＞

【戦略】

球の中心を I, I から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とします。

空間座標の話では, 直交座標表示 (平面で言う $y=2x+1$ のような x 座標と y 座標との関係式によって図形を捉える見方) は一部の図形を除き, かえって複雑になるため, 基本的には「ベクトル方程式」で考えます。

ベクトルを繋いで考える結果はパラメータ表示になります。

例えば,「H が平面 ABC 上にある」ということの翻訳について考えてみます。

平面 ABC の方程式 (直交座標表示) に頼らないとなると

H が平面 ABC 上にある … $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる

というベクトル方程式で表せます。

ベクトル方程式とは一言で言ってしまえば
「 この ＝ を満たす H 集まれ～ 」
ということです。

(そもそも「 この ＝ を満たす〇〇 集まれ～ 」というのが方程式という言葉の意味です。この ＝ というのが 2 次式に関するものなら 2 次「方程式」, 対数に関するものなら対数「方程式」… という感じです。今回はベクトルに関するものなのでベクトル「方程式」と呼ばれているだけです。)

今回の話に戻ると, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ というベクトル方程式の結果

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}1-s-t\\ s\\ 2t\end{pmatrix}$ **というものを得ます。今回特に使うことはありませんが**

これが意味することは $\begin{cases}x=1-s-t\\ y=s\\ z=2t\end{cases}$ **というパラメータ表示です。**

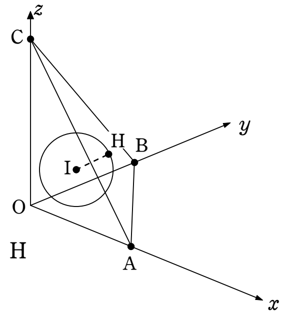
(媒介変数表示とも言います。)

本問では, H のパラメータ表示が得られたことから, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ が成分表示できます。

これにより, (1), (2) の肝となる $|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2$ が得られます。

(1) では, $|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2=r^2$ という関係式が成立しますし, (2) では交円の半径を R とすると, $R^2=r^2-|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2$ として計算できます。

【解答】



(1) 求める球の中心を I とする。

この球は xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接するので

I(r, r, r) $(0<r<1)$ とおける。

I から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。

この H は平面 ABC 上の点なので, 実数 s, t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。

これより,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-s-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &=(1-s-t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1-s-t\\ s\\ 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OI}}\\ &=\begin{pmatrix}1-s-t-r\\ s-r\\ 2t-r\end{pmatrix}\ \cdots ①\end{aligned}$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{IH}}\perp$ 平面 ABC なので, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

これより, $\begin{cases}-(1-s-t-r)+(s-r)=0\\ -(1-s-t-r)+2(2t-r)=0\end{cases}$

これを s, t の連立方程式と見て解くと, $s=\dfrac{4-r}{9}$, $t=\dfrac{1+2r}{9}$

① に代入すれば, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}=\begin{pmatrix}\frac{4-10r}{9}\\ \frac{4-10r}{9}\\ \frac{2-5r}{9}\end{pmatrix}=\dfrac{2-5r}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ を得る。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2&=\frac{(2-5r^2)}{81}\cdot(2^2+2^2+1^2)\\ &=\frac{(5r-2)^2}{9}\end{aligned}$$

この球は平面 ABC と接しているので, $|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2=r^2$ が成立する。

ゆえに, $\dfrac{(5r-2)^2}{9}=r^2$ で分母を払って整理すれば

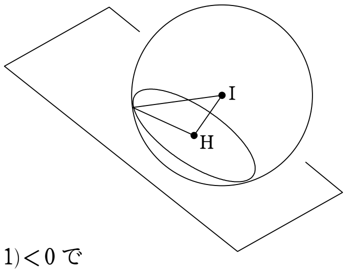
$16r^2-20r+4=0$, すなわち $4r^2-5r+1=0$ を得る。

$(4r-1)(r-1)=0$ で $0<r<1$ であるので, $r=\dfrac{1}{4}$

以上から求める球の中心 I の座標は $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$ … 答

(2)　引き続き球の中心を $\mathrm{I}(r,\ r,\ r)$ とおき，話を進める。

平面 ABC と，この球が交わるとき



$|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|<r$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2<r^2$

$\dfrac{(5r-2)^2}{9}<r^2$

これを整理すれば $(4r-1)(r-1)<0$ で

$\dfrac{1}{4}<r<1$ を得る。

このとき，この球と平面 ABC の交わりの円の半径を R とする。

この交わりの円の面積は πR^2 であるため，R^2 が最大となるときを考えればよい。

三平方の定理から，

$$\begin{aligned} R^2&=r^2-|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2\\ &=r^2-\frac{(5r-2)^2}{9}\\ &=-\frac{16}{9}r^2+\frac{20}{9}r-\frac{4}{9}\\ &=-\frac{16}{9}\left(r-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{4}<r<1$ の範囲では R^2 は $r=\dfrac{5}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

ゆえに，求める円の面積の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi}$ … 答

【総括】

【解答】では平面の直交座標表示に頼らない方針でいきましたが，平面の直交座標表示を用いるならば

$ax+by+cz+d=0$ として，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ を通ることから，$\begin{cases} a+d=0\\ b+d=0\\ 2c+d=0 \end{cases}$ を得て，$2x+2y+z-2=0$ を得ます。

あるいは，$(p,\ 0,\ 0)$，$(0,\ q,\ 0)$，$(0,\ 0,\ r)$ を通る平面の方程式が

$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$ であることを利用してもよいでしょう。

これにより，$\mathrm{I}(r,\ r,\ r)$ と平面 $2x+2y+z-2=0$ との距離は

$$\mathrm{IH}=\frac{|2r+2r+r-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|5r-2|}{3}$$

と求めることもできます。(点と直線の距離と同じ要領)

平面の方程式が得られたのであれば，法線ベクトル $\vec{n}$ として

$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ が読み取れますから，その方向の単位ベクトル $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ を準備して

$\overrightarrow{\mathrm{IH}}=\mathrm{IH}\cdot\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\dfrac{|5r-2|}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ として話を進めることもできるでしょう。

なお，三角形の内接円の半径を求めるという２次元 Ver

$$\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\triangle\mathrm{ABC}$$

をインスピレーションして，(1) をその拡張である３次元 Ver で考えようと思った人は

$$\frac{r}{3}(\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{ABC})=(\text{四面体 OABC の体積})$$

で仕留めることもできます。

ただ，(1)，(2) の繋がりや，流れを考えると，それよりかは $|\overrightarrow{\mathrm{IH}}|^2$ を計算しておいた方がスムーズに繋げやすいでしょう。