xy 平面において x，y がともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という。
正の整数 n に対して

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n$$

で定まる領域を D とする。

4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　$R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。
(2)　$S(n)$ を求めよ。
(3)　$R(n)$ を求めよ。
(4)　$R(n)=1001$ となる n を求めよ。

＜ '20 名古屋大 ＞

【戦略】

(1)　**具体的な場合ですから，指を折って数えてもいいのですが，できることなら $n=3$ から $n=4$ に繋げるという気持ち，すなわち漸化式を意識しておくと，それが (2)，(3) に活きてきそうです。**

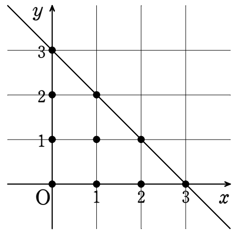
(2)　$S(n+1)$ **については，左下の頂点 L が O か O じゃないかで場合分けすれば漸化式が立つでしょう。**

(3)　$R(n+1)$ **については L が x 軸上にあれば，$S(n+1)$ でいけますし L が x 軸上になければ 1 つ浮かせて考えれば $R(n)$ 通りです。**

(4)　$R(n)$ **は明らかに n に関する単調増加数列ですから $R(n)=1001$ となる n の値はあるとしても 1 個までです。**

$1001=7\cdot 11\cdot 13$ **であることに注意して，見つけにいくという感覚で進めていきましょう**

【解答】



(1)　左下の頂点と右上の頂点を決めれば長方形が 1 つ対応する。

左下の頂点を L，右上の頂点を R とする。

＜ $S(3)$ について＞

L が O と一致するとき，R は (1，1)，(1，2)，(2，1) の 3 通り

L が (1，0) のとき R は (2，1) の 1 通り

$S(3)=3+1=4$

＜ $R(3)$ について＞

L が x 軸上のとき $S(3)$ ($=4$) 通り

L が x 軸上にないとき 図 1 の斜線部の領域内で数えればよく
$R(2)$ ($=1$) 通り

$R(3)=4+1=5$ …圏

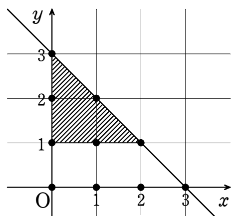


図 1

＜ $S(4)$ について＞

L が O と一致するとき，R の決め方は 6 通り

L が O でないとき

R の決め方は図 2 の斜線部で考えれば $S(3)$ ($=4$) 通り

ゆえに，$S(4)=6+S(3)$
$=10$

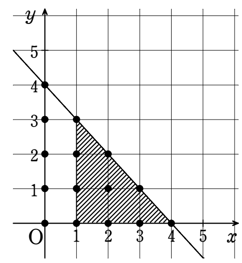


図 2

＜ $R(4)$ について＞

L が x 軸上のとき $S(4)$ ($=10$) 通り

L が x 軸上にないとき 図 3 の斜線部の領域内で考えればよく
$R(3)$ 通り

$R(4)=S(4)+R(3)$
$=15$ …圏

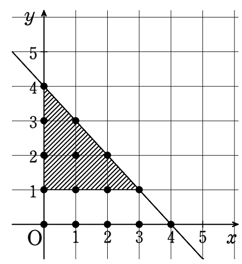


図 3

(2)　＜ $S(n+1)$ について ＞

Lが O と一致するとき，R の決め方は

$$n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2} \quad 【通り】$$

Lが O と一致しないとき

図 4 の領域内で考えればよく
$S(n)$ 通り

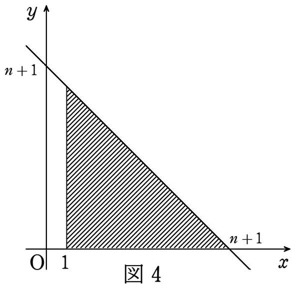


図 4

よって
$S(n+1)=S(n)+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
S(n)&=S(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\\
&=0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}}{2\cdot 3}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\{a_{k+1}-a_k\} \quad (a_k=(k-1)k(k+1) \text{とおいた})\\
&=\frac{1}{6}\{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\}\\
&=\frac{1}{6}(a_n-a_1)\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)
\end{aligned}$$

この式に $n=1$ を代入すると $S(1)=0$ を得るため，この式は
$n=1$ のときも成立する。

以上から　$S(n)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ …答

(3)　＜ $R(n+1)$ について＞

Lが x 軸上のとき $S(n+1)$ 通り

Lが x 軸上にないとき

図 5 の領域内で考えればよく
$R(n)$ 通り

よって

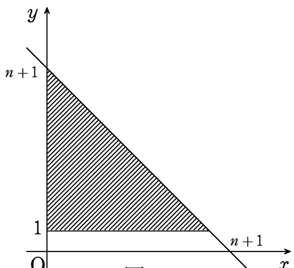


図 5

$$\begin{aligned}
R(n+1)&=R(n)+S(n+1)\\
&=R(n)+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad (\because (2))
\end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
R(n)&=R(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)\\
&=0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}}{6\cdot 4}\\
&=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n-1}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\
&=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n-1}\{b_{k+1}-b_k\} \quad (b_k=(k-1)k(k+1)(k+2) \text{とおいた})\\
&=\frac{1}{24}(b_n-b_1)\\
&=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

この式に $n=1$ を代入すると $R(1)=0$ を得るため，この式は
$n=1$ のときも成立する。

以上から　$R(n)=\dfrac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2)$ …答

(4)　(3) より　$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)=1001\ (=11\cdot 7\cdot 13)$ …(*)

これより　$\begin{aligned}(n-1)n(n+1)(n+2)&=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\\&=11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\end{aligned}$

よって (*) を満たす n として $n=12$ がある。

一方明らかに

$$R(1)<R(2)<R(3)<\cdots\cdots$$

なので，$R(n)=1001$ を満たす n は高々 1 個

以上から，求める n の値は $n=12$ …答

【総括】

(1) の具体例の段階から，(2)，(3) に繋がる考え方をしたいところです。

例えば，今回問われてはいないですが $S(3)$，$S(4)$ も求めておきたいです。

(2)，(3) で作成した漸化式の処理としては階差数列の処理が必要となるものでしたが，計算はまともにぶつかると面倒です。

今回の形については，解答でやったような工夫の余地があります。

Σ 計算の基本の 1 つ「差分解からの和の中抜けを狙う」という態度です。

(4) の整数問題は解くというよりも「見つける」という感覚に近いでしょう。

ちなみに奈良県立医科大の問題の考え方をすれば
(3) は ${}_{n+2}\mathrm{C}_4$ 通り，(2) は ${}_{n+1}\mathrm{C}_3$ 通り と即座に分かりますが，ここでは勉強のために愚直に漸化式から処理するという態度でやりました。