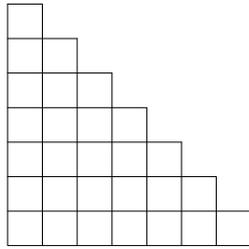


長方形の数え上げ

右の図形の中に、図形の線分を辺とする長方形（正方形を含む）はいくつあるか求めよ。



< '15 奈良県立医科大 >

【戦略1】

何かあるんですが、見えなかったら愚直に行きましょう。

まずは長方形を決める際に、右上と左下という2点を決めれば、長方形が1つ対応します。

物事を一気に考えることは難しいですから、右上の頂点を「ココ！」と固定します。

左下の頂点の候補を下から考えていくと、上に1段上がるごとに選択肢が一定に増えていくことが分かります。

それを愚直に調べ上げ、最後に加えればよいでしょう。

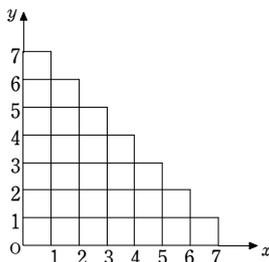
(何言ってるか分からない人は実際に【解答】を見た方が早いかもしれません。)

【解1】

左下の頂点と右上の頂点を決めれば長方形が1つ対応する。以下長方形の右上の頂点をR、左下の頂点をLと呼ぶ



そこで、まずはRを固定したとき、Lがとり得る場合の数を求める。



と座標軸上に配置する。

< Rが $x=1$ 上のとき >

$R(1, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0)$ の1通り

$R(1, 2) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (0, 1)$ の2通り

⋮

$R(1, 7) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, 6)$ の7通り

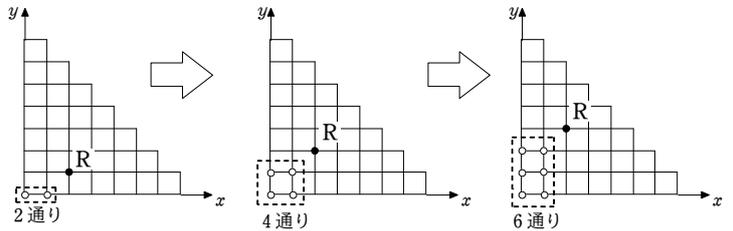
$$1+2+3+4+5+6+7=28 \text{ 【通り】}$$

< Rが $x=2$ 上のとき >

$R(2, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0)$ の2通り

以降、 y 座標が1増えるごとにLの選択肢は2通りずつ増えていくため

$$2+4+6+8+10+12=42 \text{ 【通り】}$$



< Rが $x=3$ 上のとき >

$R(3, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ の3通り

以降、 y 座標が1増えるごとにLの選択肢は3通りずつ増えていくため

$$3+6+9+12+15=45 \text{ 【通り】}$$

< Rが $x=4$ 上のとき >

$R(4, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)$ の4通り

以降、 y 座標が1増えるごとにLの選択肢は4通りずつ増えていくため

$$4+8+12+16=40 \text{ 【通り】}$$

< Rが $x=5$ 上のとき >

$R(5, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)$ の5通り

以降、 y 座標が1増えるごとにLの選択肢は5通りずつ増えていくため

$$5+10+15=30 \text{ 【通り】}$$

< Rが $x=6$ 上のとき >

$R(6, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (5, 0)$ の6通り

以降、 y 座標が1増えるごとにLの選択肢は6通りずつ増えていくため

$$6+12=18 \text{ 【通り】}$$

< Rが $x=7$ 上のとき >

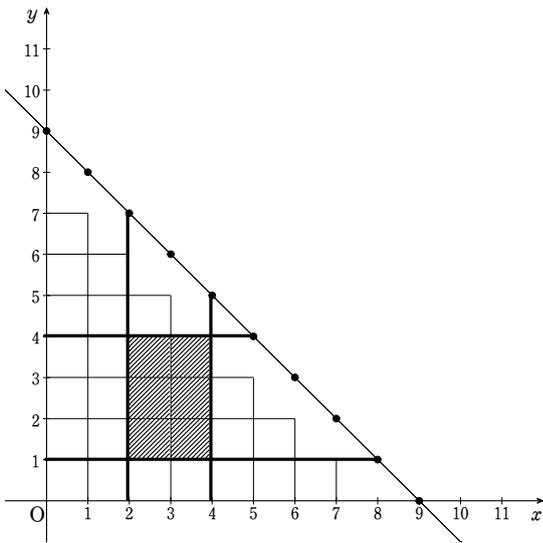
$R(7, 1) \Rightarrow L$ は $(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (6, 0)$ の7通り

以上から、求める長方形の個数は

$$28+42+45+40+30+18+7=210 \text{ 【通り】} \dots \text{ 罫}$$

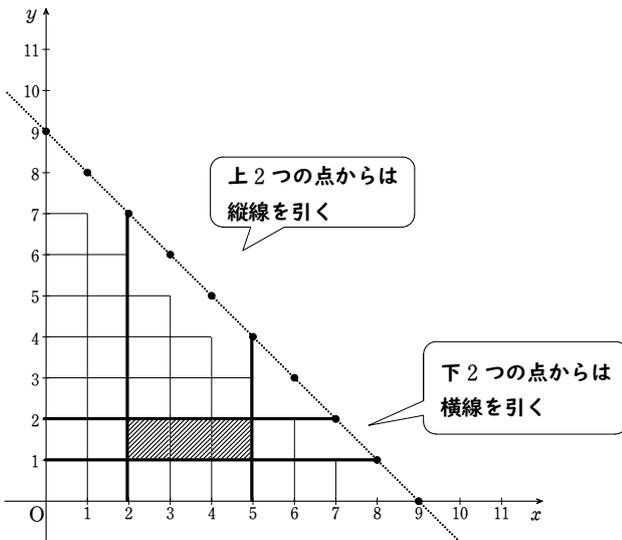
【戦略 2】

完全に閃き一発なのですが、 $y = -x + 9$ 上の格子点のうち第 1 象限、及び座標軸上にある 10 点から 4 点を選べば



という長方形が 1 つ定まります。

【解 2】



$y = -x + 9$ 上の格子点のうち、第 1 象限及び、座標軸上にある 10 個の点から 4 つの点

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \quad (y_1 > y_2 > y_3 > y_4)$$

をとる。

このとき、

$x = x_1, x = x_2, y = y_3, y = y_4$ によってできる長方形と題意の図形内にある長方形が 1 対 1 対応する。

よって、求める長方形の個数は ${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ 【通り】 … 圏

【総括】

【解 2】は完全に閃き一発なので、試験場で舞い降りる可能性は低いと思います。

愚直に数え上げる【解 1】においても

「右上と左下の 2 点を決めれば長方形が 1 つ対応する」

という部分までは自力で辿り着く必要があります。

どこかで脳みそを使う必要があります、記憶に頼る態度では太刀打ちできないでしょう。

ちなみに本問は完全にノーヒントでしたが、誘導が付いた問題が 2020 年度の名古屋大学・文系で出題されていますので、ぜひそちらも併せてやってみてください。