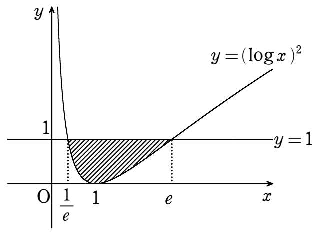
曲線 $y=(\log x)^2$ と直線 $y=1$ で囲まれる部分を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

＜ ’04 京都工芸繊維大 ＞

【戦略】

まずはグラフの状況を把握しましょう。

微分して調べると



という状況で，この斜線部分の y 軸回転体の体積を求めることになります。

今回は「くり抜き」が発生しますので，それ相応の態度が求められます。
（まぁ縦軸回転体ではくり抜きは付き物ですが）

（くり抜きが必要な）縦軸回転体の体積の導出における王道的な対応は

「何が何でもパラメータ表示」

です。

今回は $y=f(x)$ という形で書かれていますが，これを無理やりにでも

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$$

とパラメータ表示するのです。

このパラメータ表示によって，「曲線を分けることが容易になります」

ここの範囲をいじることで分けることが容易なのです。

今回の場合，

曲線 $C_1:\begin{cases} x=t \\ y=(\log t)^2 \end{cases} \quad (1\leqq t\leqq e)$ **（外側の部分を担う）**

曲線 $C_2:\begin{cases} x=t \\ y=(\log t)^2 \end{cases} \quad \left(\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq 1\right)$ **（くり抜かれる部分を担う）**

と分けます。

C_1，C_2 **の y 軸回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，求める体積は**

$$V_1-V_2$$

で求められます。

V_1，V_2 **については積分区間が違うだけで，被積分関数は同じです。**

バラバラに計算せず，「うまく積分区間を繋げる」という工夫をしましょう。

【解答】

真数条件より，$y=(\log x)^2$ の定義域は $x>0$

$f(x)=(\log x)^2 \ (x>0)$ に対して，

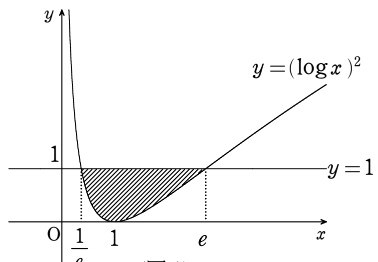
$$f'(x)=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{2\log x}{x}$$

（分母）>0

$$f''(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}$$
$$=\frac{2(1-\log x)}{x^2}$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0	↗	1	↗	∞

よって，$y=f(x)$ のグラフ，及び $y=1$ のグラフは以下の (図 1) のようになる。



(図 1)

交点についての x 座標は $(\log x)^2=1$，すなわち $\log x=1,\ -1$ を得る

これより，$x=e,\ e^{-1}$

ゆえに交点は，$\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$，$(e,\ 1)$

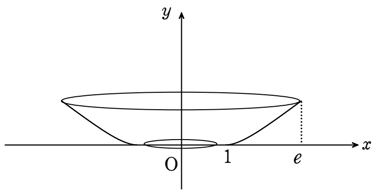
(図 1) の斜線部分についての y 軸回転体の体積を求めればよい。

曲線 $C_1:\begin{cases} x=t \\ y=(\log t)^2 \end{cases} \quad (1\leqq t\leqq e)$

曲線 $C_2:\begin{cases} x=t \\ y=(\log t)^2 \end{cases} \quad \left(\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq 1\right)$

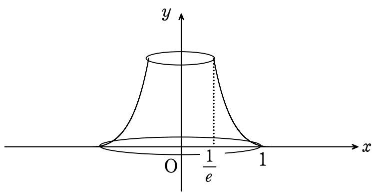
とし，C_1，C_2 の y 軸回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。

＜V_1 について＞



$$
\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^1 \pi x^2\,dy \\
&= \int_1^e \pi x^2 \frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_1^e \pi t^2\, 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= 2\pi\int_1^e t\,\log t\;dt
\end{aligned}
$$

＜V_2 について＞

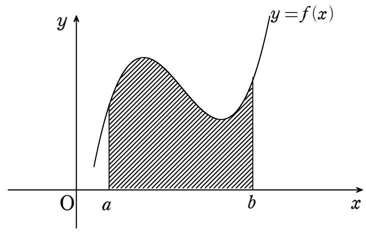


$$
\begin{aligned}
V_2 &= \int_0^1 \pi x^2\,dy \\
&= \int_1^{\frac{1}{e}} \pi x^2 \frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_1^{\frac{1}{e}} \pi t^2\, 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= 2\pi\int_1^{\frac{1}{e}} t\,\log t\;dt
\end{aligned}
$$

求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= V_2 - V_1 \\
&= 2\pi\int_1^e t\,\log t\,dt - 2\pi\int_1^{\frac{1}{e}} t\,\log t\;dt \\
&= 2\pi\left\{\int_1^e t\,\log t\;dt - \int_1^{\frac{1}{e}} t\,\log t\;dt\right\} \\
&= 2\pi\left\{\int_1^e t\,\log t\;dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 t\,\log t\;dt\right\} \\
&= 2\pi\int_{\frac{1}{e}}^e t\,\log t\,dt \\
&= 2\pi\int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\;dt \\
&= 2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}t^2\log t\right]_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt\right\} \\
&= 2\pi\left\{\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^e t\,dt\right\} \\
&= 2\pi\left\{\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{e}}^e\right\} \\
&= 2\pi\left\{\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right\} \\
&= 2\pi\left\{\frac{e^2}{4} + \frac{3}{4e^2}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^2 + \frac{3}{e^2}\right) \cdots \boxed{\text{答}}
\end{aligned}
$$

＜cf＞ バームクーヘン分割

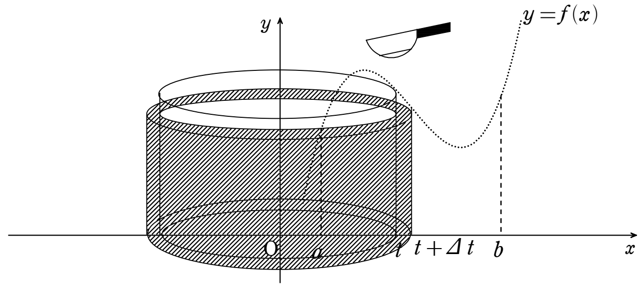


図の斜線部分の y 軸回転体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

で与えられます。

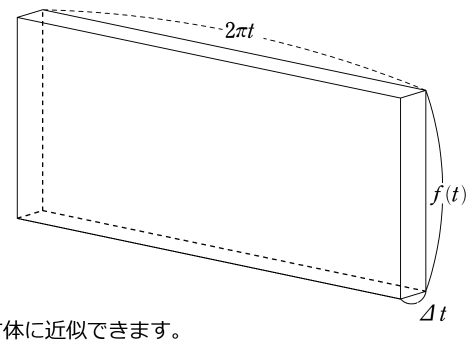
（簡易的な説明）



$x=a$ から $x=t$ までの部分の y 軸回転体の体積を $V(t)$ とします。

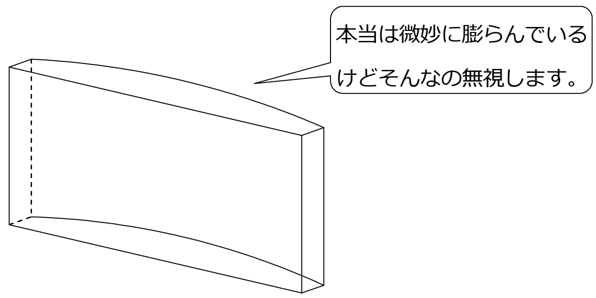
$V(t+\varDelta t)-V(t)$ は上の図の斜線部分の体積に近似されます。

斜線部分を切り開いた図形は $\varDelta t$ が限りなく小さければ



という直方体に近似できます。

（本来は外側の円周の方が長いので，直方体の片側は膨らんでいます）



$V(t+\varDelta t)-V(t)=2\pi t\,f(t)\,\varDelta t$ すなわち $\dfrac{V(t+\varDelta t)-V(t)}{\varDelta t}=2\pi\,t\,f(t)$

ですから，$\varDelta t\to 0$ として，$V'(t)=2\,\pi t f(t)$ を得ます。

特に，$V=V(b)$ なので，$V(b)=V(b)-V(a)=\Big[V(x)\Big]_a^b=\displaystyle\int_a^b V'(x)\,dx$

よって，$V=\displaystyle\int_a^b 2\pi x\,f(x)\,dx$ となります。

＜バームクーヘン分割による検算＞

今回の体積をバームクーヘン分割で検算してみると

上－下

$$V=\int_{\frac{1}{e}}^{e} 2\pi x\left\{1-(\log x)^2\right\}dx$$
$$=2\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e} x-x(\log x)^2\,dx$$

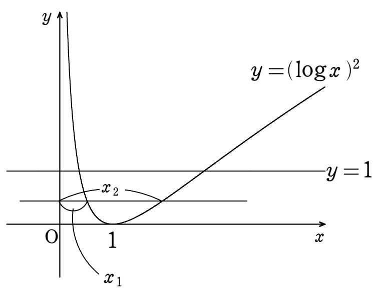
$$\int x(\log x)^2\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'(\log x)^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int\frac{1}{2}x^2\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int x\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\left\{\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)(\log x-1)+\frac{1}{4}x^2+C\ (\ C:\text{積分定数}\ )$$

$$V=2\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2(\log x)(\log x-1)-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{4}x^2\{2-2(\log x)(\log x-1)-1\}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{4}x^2\{1-2(\log x)(\log x-1)\}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x^2\{1-2(\log x)(\log x-1)\}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{e^2-\frac{1}{e^2}\{1-2\cdot(-1)\cdot(-2)\}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(e^2+\frac{3}{e^2}\right)$$

検算という割に結構大変でした。

【総括】

縦軸回転体（主に y 軸回転体）はくり抜きが必要な場面が多く，断面である半径を出すにあたり，外側と内側の曲線を分けて考える必要があります。



といったように，$y=k$ で切ったときに水平方向（断面の半径）を 2 つ分けて考える必要があります。

その場合，$\log x=\sqrt{y}$，$-\sqrt{y}$ ですから，$x_1=\dfrac{1}{e^{\sqrt{y}}}$，$x_2=e^{\sqrt{y}}$ として処理していきます。

つまり，$y=f(x)$ の形から，$x=(y$ の式$)$ とし，$\int_a^b \pi x_2{}^2-\pi x_1{}^2\,dy$ として処理していくことになると思いますが，処理の見た目的に積極的にとりたい方針ではないでしょう。

縦軸回転体においては，最初からパラメータ表示された曲線はもちろん，$y=f(x)$ という形相手でも $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$ などと，敢えてパラメータ表示して処理していくと記述の面でもやりやすいでしょう。

例えば．$y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた図形の y 軸回転体であれば

$$C_1:\begin{cases}x=t\\ y=-t^2+2t\end{cases}\ (1\leqq t\leqq 2),\quad C_2:\begin{cases}x=t\\ y=-t^2+2t\end{cases}\ (0\leqq t\leqq 1)$$

とパラメータの範囲をいじくるだけで，容易に 2 つの曲線に分割できます。

C_1，C_2 の y 軸回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすれば，

$$V_1=\int_0^1\pi x^2\,dy \qquad V_2=\int_0^1\pi x^2\,dy$$
$$=\int_2^1\pi x^2\frac{dy}{dt}\,dt \qquad =\int_0^1\pi x^2\frac{dy}{dt}\,dt$$
$$=\int_2^1\pi t^2(-2t+2)\,dt \qquad =\int_0^1\pi t^2(-2t+2)\,dt$$

となり，$V=V_1-V_2$ として計算しますが，積分区間がつながることをうまく利用して計算しましょう。

また，バームクーヘン分割についてはくり抜かなくても使えるのが最大の利点で，あまりにもくり抜きが多いときなどは減点覚悟で用いるぐらいかなと思います。（あんまりそういった無駄に凝った出題はないと思いますが）

本問レベルであれば，パラメータ表示でバシっと倒してください。

今更ですが，$\int_a^b\pi x^2\,dy$ を処理する際ですが

$\int_a^b\pi x^2\,dy$　$x=(y$ の式$)$，あるいはもっとダイレクトに $x^2=(y$ の式$)$ であれば問題ないですね。

それが困難であるとき，$\begin{cases}x=(t\text{ の式})\\ y=(t\text{ の式})\end{cases}$ などとパラメータ表示が得られているのであれば

$\int_a^b\pi x^2\,dy$　ここを t の式に　ここを dt に 変換してやればいいですね。

パラメータ表示が得られているのであればチョロいですね。

$\dfrac{dy}{dt}$ も得られますからこれもチョロいです。

※ 変換するのがチョロいと言っているだけで，計算がチョロいというわけではないですので誤解なきようお願いします。