【類題】

七角柱の 9 個の面に 1 から 9 までの番号が書いてある。この 9 個の面に 1 面ずつ，異なる 4 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく。

このとき，どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方は何通りあるか。

＜ '99 京都大 ＞

【戦略 1】

４色で塗り分けるので，必然的に上面と底面は同じ色で塗ることになります。

そこに気が付けば平面の図で考えることができるでしょう。

２つ目の山場は「７角柱」という微妙な数字です。

直接数えるにしても少々骨が折れます。

そこで，ものを数える手段の一つとして

「漸化式を用いて場合の数を求める」

という手法が思いつけばしめたものです。

漸化式による数え上げは複雑なルールであればあるほど効果を発揮します。

漸化式のテリトリーに引きずり込むために

「７枚の側面」→「n 枚の側面」

へ一般化して考えることにします。

【解 1】

上面と底面が異なる色だと仮定する。

すると残り 2 色で側面を塗ることになるが，側面は奇数個であるために隣りあう面を異なる色で塗り分けることは不可能である。

したがって上面と底面は同じ色であることが分かる。

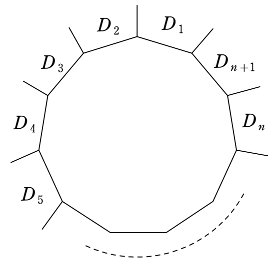
上面と底面の色の選び方は 4 通り。 … ①

残り 3 色で 7 枚の側面を塗り分ける方法の数を考える。

一般に 3 色で n 枚の側面を塗り分ける場合の数を a_n 通りとする。
（ただし，$n=3，4，\cdots\cdots$ とする 。）

＜$n+1$ 枚の側面の塗り方について＞

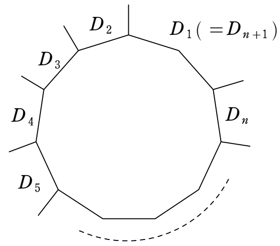
図のように $n+1$ 枚の側面を D_1 ～ D_{n+1} と呼ぶ。



D_1 の塗り方は 3 通り
D_2 の塗り方は D_1 以外の 2 通り
D_3 の塗り方は D_2 以外の 2 通り
⋮
D_n の塗り方は D_{n-1} 以外の 2 通り
D_{n+1} の塗り方は D_n 以外の 2 通り
よって，3×2^n 通り

ただし，この中には，D_{n+1} と D_1 の色が重複する場合が含まれている。

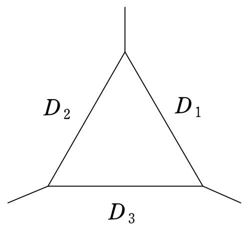
それは D_1 と D_{n+1} が同色で同じ領域とみなしたときの塗り方であり，それを除く必要がある。



除く場合の数は
異なる 3 色で右の n 個の
領域を塗る塗り方であり
a_n 通りである。

ゆえに
$a_{n+1}=3\cdot 2^n-a_n$ （$n=3，4，\cdots\cdots$）… (*)

さて，ここで a_3 を求める .



D_1 の塗り方は 3 通り
D_2 の塗り方は D_1 以外の 2 通り
D_3 の塗り方は D_1，D_2 以外の 1 通り

ゆえに $a_3=3\times 2\times 1=6$

(*) を次々と使っていくと

$$a_4=3\cdot 2^3-a_3=24-6=18$$
$$a_5=3\cdot 2^4-a_4=48-18=30$$
$$a_6=3\cdot 2^5-a_5=96-30=66$$
$$a_7=3\cdot 2^6-a_6=192-66=126 \quad \cdots ②$$

①，② より求める場合の数は $4\times 126=504$ 【通り】… 答

【戦略 2】

所詮七角柱という具体的な数字の問題です。

愚直に樹形図で数え上げていくことも試験場では有力です。

【解 2】

上面と底面は同じ色であり，その色の選び方は 4 通り。

残り3 色で 7 面を塗り分ける。

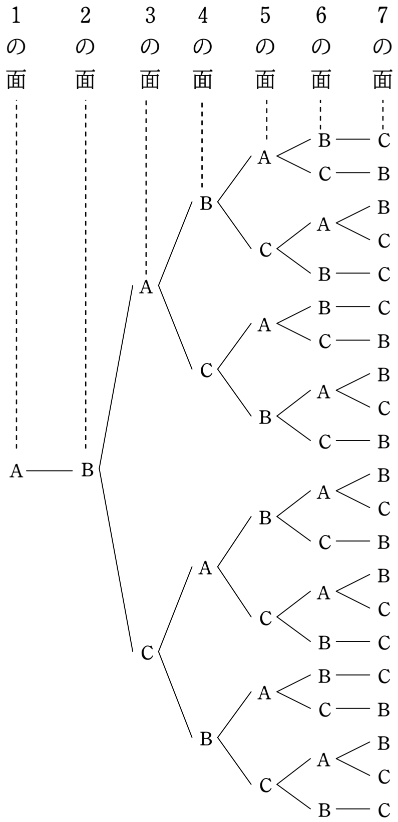
この 3 色を A，B，C と呼ぶ。

7 枚の側面に書かれている番号を 1 ～ 7 とし，番号 k が書かれている面を k の面と呼ぶことにする。

1，2 の面の色の決め方は ${}_3\mathrm{P}_2$ 【通り】

例えば，1，2 の面をそれぞれ A，B で塗ったときを考える。

このとき残る面の色の塗り方は以下の樹形図のようになる。



1，2 の面を決めたときの 3 ～ 7 の面の塗り方は上の樹形図から 21 通り

以上から求める場合の数は $4\cdot{}_3\mathrm{P}_2\cdot 21=504$ 【通り】… 答

【総括】

「側面が偶数のときは上面と底面の色が異なっていてもいいのでは？
　偶数と奇数によって漸化式の立て方が変わってくるのでは？」
という疑問をもつ人もいると思います。

確かにそうですが，私が定めた a_n の定義をよく見てください。

「 3 色で n 枚の側面を塗り分ける方法を a_n 通り 」と定義しました。

最終的に求めるものは 7 角柱の塗り方ですが，今僕らが欲しいのは

「 7 枚の側面の塗り分け方 」

です。

【解 2 】はエレガントな解答に対して「エレファント」な解答です。
力業で強引に解決にもっていくような解答をアメリカではこう揶揄されるそうです。

試験場においてはエレファントな解答も決して否定するものではないと思います。