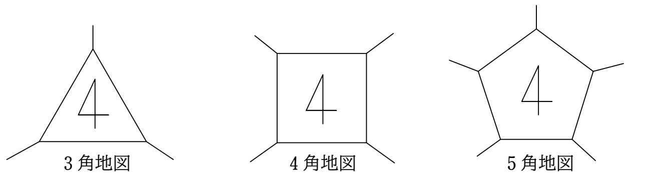
正 n 角形と各頂点から放射状に伸ばした線とで区分けされ，方向の固定された図を『n 角地図』と呼ぶことにする。

n 角地図を異なる 4 色で塗り分ける場合について以下の各問いに答えよ。ただし同じ色を何回も使ってよいが（使わなくてもよい）隣り合う領域とは異なる色でなければならない。



3 角地図　　4 角地図　　5 角地図

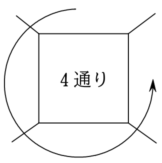
(1) 3 角地図，4 角地図，5 角地図を塗り分ける場合の数をそれぞれ求めよ。

(2) n 角地図 （$n>3$）を塗り分ける場合の数を求めよ。

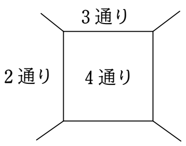
＜ '96 麻布大 ＞

【戦略】

3 角地図程度であればすぐに $4\times3\times2\times1=24$ 【通り】と求まります。問題は 4 角地図以降です。

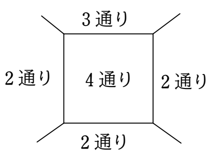


まず中央の色を決め，周りを左図の順番で決めていくと



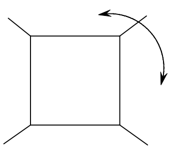
と，ここまでは躓くことなくいけますが，残り 2 つをどうするかで悩むと思います。

本当は



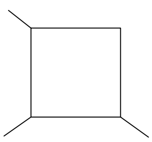
とやりたいところですが

これだと



この２ヵ所が同じ色の場合を含んでしまいます。

ただ，この場合は

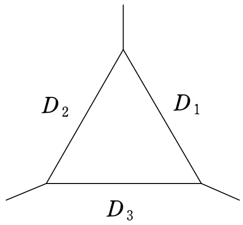


の塗り方（これは 3 角地図の塗り方と同じ）を除けばいいですね。

この考え方はこれ以降も同様に使えそうなので，一般論で漸化式を立てれば解決です。

【解答】

一般に n 角地図を塗り分ける場合の数を a_n 通りとする。
（ただし，$n=3,\ 4,\ \cdots\cdots$ とする。）



(1) 中央の塗り方は 4 通り
D_1 の塗り方は 3 通り
D_2 の塗り方は D_1 以外の 2 通り
D_3 の塗り方は D_1，D_2 以外の 1 通り

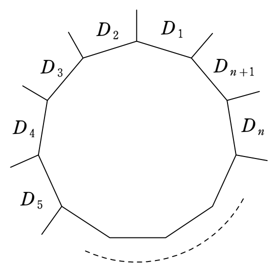
ゆえに $a_3=4\times3\times2\times1=24$

＜$n+1$ 角地図の塗り方について＞

中央の領域の塗り方は 4 通り。

よって，残り 3 色で中央以外の領域を塗り分ける方法を考える。

図のように $n+1$ 個の領域を
D_1 〜 D_{n+1} と呼ぶ。



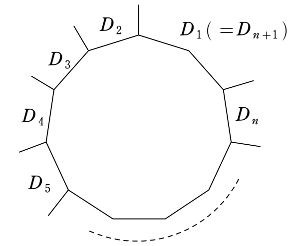
D_1 の塗り方は 3 通り
D_2 の塗り方は D_1 以外の 2 通り
D_3 の塗り方は D_2 以外の 2 通り
⋮
D_n の塗り方は D_{n-1} 以外の 2 通り
D_{n+1} の塗り方は D_n 以外の 2 通り

よって，$4\times3\times2^n$（$=12\cdot2^n$）通り

ただし，この中には，D_{n+1} と D_1 の色が重複する場合が含まれている。

それは D_1 と D_{n+1} が同色で同じ領域とみなしたときの塗り方であり，それを除く必要がある。

除く場合の数は
異なる 3 色で右の n 色地図を
塗る塗り方であり a_n 通りである。



ゆえに

$a_{n+1}=12\cdot2^n-a_n$ （$n=3,\ 4,\ \cdots\cdots$）$\cdots(*)$

$(*)$ を次々と使っていくと

$a_4=12\cdot2^3-a_3=96-24=72$
$a_5=12\cdot2^4-a_4=192-72=120$

よって，3 角地図，4 角地図，5 角地図の塗り方はそれぞれ

24 通り，72 通り，120 通り …答

(2) (∗) の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+6$$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+6 \Leftrightarrow b_{n+1}-4=-\dfrac{1}{2}(b_n-4)$

$b_3=\dfrac{a_3}{2^3}=\dfrac{24}{8}=3$ なので，

$$\begin{aligned} b_n-4&=(b_3-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

これより，$\dfrac{a_n}{2^n}-4=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

ゆえに，

$$\begin{aligned} a_n&=2^n\left\{4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} \\ &=2^{n+2}-2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &=2^{n+2}-2^n(-1)^{n-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &=2^{n+2}-2^3(-1)^{n-3} \\ &=2^{n+2}+8(-1)^n \end{aligned}$$

よって，n 角地図の塗り方は $2^{n+2}+8(-1)^n$ 【通り】… 答

【総括】

前の色と隣り合わないように色を決めていき，グルッと１周させ，最初と最後が同じ色の場合を除くことになりますが，結構ハードルが高い発想です。

通常，場合の数漸化式や確率漸化式は前の状況から ”追加派生する” ような考え方をすることがほとんどなので，前のシチュエーションを除去する本問は発想面で難しいと思います。

めちゃくちゃ頻出というわけではないので，その分経験できる回数も多くないでしょうから，もう一題類題として，1999 年度の京都大学の問題を紹介しますので，ぜひそちらもやってみてください。