楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の外側の点 $\mathrm{P}(r,\ s)$ から C に引いた２つの接線が常に直交するとき，そのような点Ｐの軌跡を求めよ。

＜ ’11 信州大 ’87 山梨大 ’85 名古屋市立大 など ＞

【戦略 1】

通常接線の問題では，接点を設定し，接線の式を出した後指定された通過点を通るように仕組むという流れをとりますが，2 次曲線における接線は「連立して判別式」という路線でも処理可能です。

相手が 2 次曲線と確定しているのであれば，分かりやすい判別式という路線も有力です。

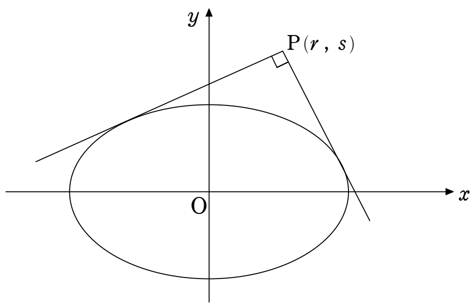
文字がたくさん登場しますが，最終的には $\mathrm{P}(r,\ s)$ の軌跡を出したいということなので，r，s に関する関係式を求めにいくという方向性は睨み続けましょう。

【解 1】

$\mathrm{P}(r,\ s)$ を通る直線 ℓ は傾きを m として

$$y=m(x-r)+s$$

と表せる。



ℓ の式と C の式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を連立すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\{m(x-r)+s\}^2}{b^2}=1$$

ここの計算が一番ツライですが一度は苦労しましょう

これを x について整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(s-rm)x+a^2\{(s-rm)^2-b^2\}=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D としたとき，

$$\frac{D}{4}=a^4(s-rm)^2m^2-a^2(a^2m^2+b^2)\{(s-rm)^2-b^2\}$$

ℓ が C と接するので，$\dfrac{D}{4}=0$ となるから

$$a^4(s-rm)^2m^2-a^2(a^2m^2+b^2)\{(s-rm)^2-b^2\}=0$$

これを m について整理すると

ここもツライですね

$$(a^2-r^2)m^2+(2rs)m+b^2-s^2=0\ \cdots(*)$$

(i)　$r\neq\pm a$ のとき

$(*)$ は m についての 2 次方程式となる。

この m についての 2 次方程式の判別式を D' とすると

$$\begin{aligned}\frac{D'}{4}&=(rs)^2-(a^2-r^2)(b^2-s^2)\\&=a^2s^2+b^2r^2-a^2b^2\\&=a^2b^2\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-1\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(r,\ s)$ は楕円 C の外側の点であり，$\dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{s^2}{b^2}>1$ を満たすことから

$$\frac{D'}{4}>0$$

すなわち，$(*)$ は異なる 2 つの実数解 m_1，m_2 をもつ。

この m_1，m_2 は楕円 C に接し，$\mathrm{P}(r,\ s)$ を通る 2 直線の傾きを表す。

この 2 直線が直交するときを考えるので，$m_1m_2=-1$

解と係数の関係から，$m_1m_2=\dfrac{b^2-s^2}{a^2-r^2}$

ゆえに，$\dfrac{b^2-s^2}{a^2-r^2}=-1$ で，これを整理すると，$r^2+s^2=a^2+b^2$ を得る。

したがって，$\mathrm{P}(r,\ s)$ の軌跡は円 $x^2+y^2=a^2+b^2\ \cdots(☆)$ のうち
$(a,\ b)$，$(a,\ -b)$，$(-a,\ b)$，$(-a,\ -b)$ を除く部分である。

(ii)　$r=\pm a$ のとき

題意の直交 2 接線は

$$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases},\quad\begin{cases}x=a\\y=-b\end{cases},\quad\begin{cases}x=-a\\y=b\end{cases},\quad\begin{cases}x=-a\\y=-b\end{cases}$$

の 4 組あり，これらの交点Ｐとしては

$(a,\ b)$，$(a,\ -b)$，$(-a,\ b)$，$(-a,\ -b)$

の 4 つ考えられる。

これら 4 つの点は全て (i) で求めた円 (☆) 上の点である。

(i)，(ii) より，求める交点Ｐの軌跡は

$$円\ x^2+y^2=a^2+b^2\ \cdots 答$$

【戦略 2】計算上の工夫

計算上の工夫ですが，

汚いものには直接触れない

という言葉を心に刻んでください。

要するにゴチャゴチャした部分は「1 文字で置き換えてしまいます。」

【解 2】 $(*)$ を得るまで

点 $\mathrm{P}(r,\ s)$ を通る直線 ℓ の式は $y=m(x-r)+s$，すなわち

$$y=mx+s-mr$$

と表せる。

これと，楕円 C の式とを連立して

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+s-mr)^2}{b^2}=1$$

汚いので K という
ゴム手袋をはめます。

ここで，$s-mr=K$ とおくと，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+K)^2}{b^2}=1$

$$b^2x^2+a^2(mx+K)^2-a^2b^2=0$$

これを整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mKx+a^2K^2-a^2b^2=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

消えるのが
嬉しいですね

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^4K^2m^2-(a^2m^2+b^2)(a^2K^2-a^2b^2)\\&=a^4b^2m^2-a^2b^2K^2+a^2b^4\end{aligned}$$

$\dfrac{D}{4}=0$ で，$a>0$，$b>0$ であるため

$$a^2m^2-K^2+b^2=0$$

$$a^2m^2-(s-mr)^2+b^2=0$$

これを m について整理すると

$$(a^2-r^2)m^2+(2rs)m+b^2-s^2=0$$

（以下【解 1】に準じる）

【戦略 3】

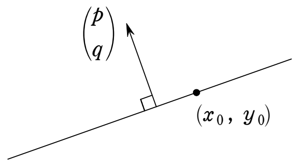
接点の設定からスタートして接線の式を立てる方針だと，苦労します。

その方針でやり切ろうと思うと

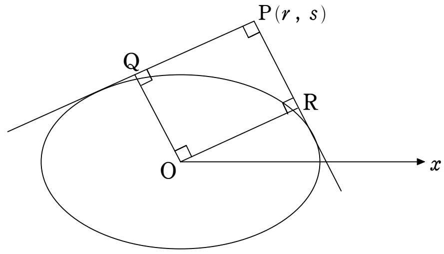
$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもち，$(x_0,\ y_0)$ を通る直線が

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)=0$$

と表せる。

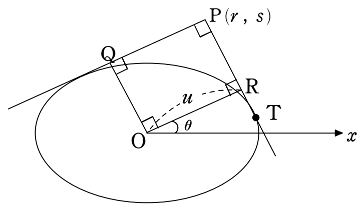


ということを利用していきます。



このような長方形を考えるのですが，$\mathrm{R}(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$ と，距離と角度を導入して，少しでも設定変数を減らすことを考えます。

【解 3】



(図 1)

(図 1) のように長方形 PQOR を考える。

$\mathrm{OR}=u$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とすると

$\mathrm{R}(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$ とおける。

このとき，直線 PR の式は $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつ直線なので

$$\cos\theta(x-u\cos\theta)+\sin\theta(y-u\sin\theta)=0$$

これを整理すると $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y-u=0$，すなわち

$$\frac{\cos\theta}{u}x+\frac{\sin\theta}{u}y-1=0\ \cdots①$$

一方，楕円 C 上の接点 $\mathrm{T}(a\cos t,\ b\sin t)$ における接線の式は

$\dfrac{(a\cos t)x}{a^2}+\dfrac{(b\sin t)y}{b^2}=1$，すなわち

$$\frac{\cos t}{a}x+\frac{\sin t}{b}y-1=0\ \cdots②$$ と表せる。

①，② が同じ直線を表すことから

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{u}=\dfrac{\cos t}{a} \\ \dfrac{\sin\theta}{u}=\dfrac{\sin t}{b} \end{cases}$$

これより，$\cos t=\dfrac{a\cos\theta}{u}$，$\sin t=\dfrac{b\sin\theta}{u}$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入すると $\dfrac{a^2\cos^2\theta}{u^2}+\dfrac{b^2\sin^2\theta}{u^2}=1$

整理すると $a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=u^2$

これは，$\mathrm{OR}^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ であることを意味する。

この θ を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ とすれば，OQ^2 の値となることから

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}^2&=a^2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+b^2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=a^2(-\sin\theta)^2+b^2(\cos\theta)^2\\&=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

三平方の定理より，$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OR}^2+\mathrm{OQ}^2$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\\&=a^2+b^2\end{aligned}$$

ゆえに，点 P の軌跡は，原点中心，半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円であり

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \quad \cdots 答$$

【総括】

接点を (α_1, β_1)，(α_2, β_2) などとおき，2 接線の式を

$$\frac{\alpha_1}{a^2}x+\frac{\beta_1}{b^2}y=1 \ , \ \frac{\alpha_2}{a^2}x+\frac{\beta_2}{b^2}y=1$$

と設定し，これらが，$\mathrm{P}(r, s)$ を通ることから

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{a^2}r+\dfrac{\beta_1}{b^2}s=1 \\ \dfrac{\alpha_2}{a^2}r+\dfrac{\beta_2}{b^2}s=1 \end{cases}$$

を得ます。

また，この 2 接線が直交することから

$\dfrac{\alpha_1}{a^2}\cdot\dfrac{\alpha_2}{a^2}+\dfrac{\beta_1}{b^2}\cdot\dfrac{\beta_2}{b^2}=0$，すなわち $\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{a^4}+\dfrac{\beta_1\beta_2}{b^4}=0$ も得ます。

もちろんここから r，s の関係式を Get しにいくことはやろうと思えばできるのでしょうが，少なくとも自分はやりたいとは思いません。

つまり，

接点 → 接線 → 通過点

の順だと爆発してしまうわけですから，今回は

通過点 → 連立 → 判別式

と，$\mathrm{P}(r, s)$ を通る直線を $y=m(x-r)+s$ とおくところからスタートするわけです。

その後の計算も気が抜けず，集中力が少しでも欠けると計算ミスが起こるでしょう。

【解 2】で行ったような置き換えの工夫は，本問に限らず有効な工夫です。

結構できる生徒ほど置き換えをバカにしがちなのですが，汚いものを直接触らないということは衛生上 (精神衛生上も含めた 2 つの意味で) 大切なことです。

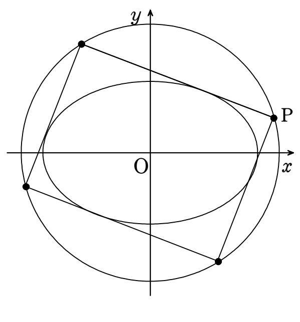
なお，【解 3】において長方形を設定する方針についてですが，少々天下り的な部分があるということは否めません。

最終的に OP^2 を三平方の定理から計算して $\mathrm{OP}^2=$(一定値) を目指すのは結論 (P の軌跡が円になるということ) を知っていないと中々出てこない方針でしょう。

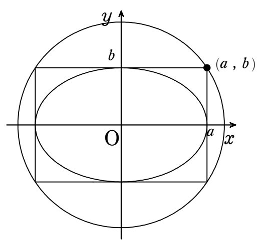
ちなみに，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に対する直交 2 接線の交点 P の軌跡は

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

という円になり，準円と呼ばれます。



原点中心の円になるということさえ分かっていれば



直交 2 接線の交点の軌跡の中に (a, b) が入っているのは明らかですから半径は $\sqrt{a^2+b^2}$ ということは即座に分かると思います。