xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により，囲まれる部分を D とする。D を直線 $y=x$ の周りに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき，

(1)　V_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

＜ ’06 横浜国立大 ＞

【戦略】

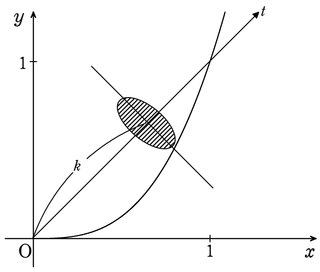
(1)　**回転体の体積の基本は**

「回転軸に対して垂直に切る」

「切り口の線分の長さを求める」

「その切り口の線分の長さを半径にもつ円が断面」

ということになります。



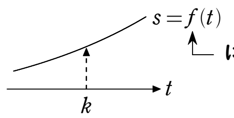
断面積を Get したあとは，その回転軸を座標軸に見立て，その方向に積分していきます。

回転軸を t 軸と呼び，$t=k$ で切った切り口の線分の長さを r_k とすると断面積は $\pi {r_k}^2$ ということになります。

従って，最終的に求める体積は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \pi {r_k}^2\,dk$ 　ということになります。

ただし，ここで困るのは r_k の導出です。

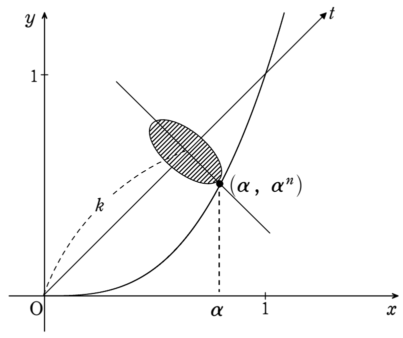
水平方向であれば



に代入すればいいのですが

その $f(t)$ に相当する式が今はありません。

そこで，



とおき，点と直線の距離公式で $r_k=(\alpha$ の式）と求めてしまいます。

そうすると変数変換（置換積分）ということになるため，

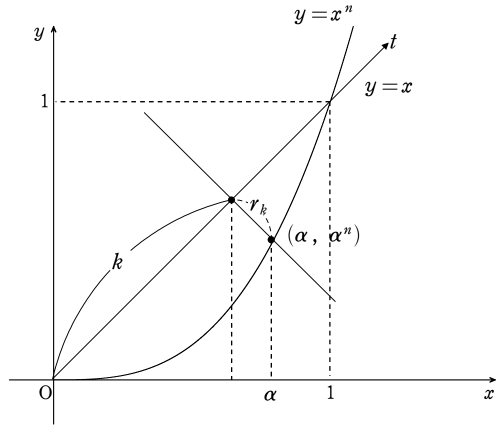
$k=(\alpha$ の式）という関係式も欲しくなります。

これについては，断面の円の中心の座標が分かれば解決します。

そして，それは 2 直線の交点の座標として求められます。

(2)　**(1) が出来た人へのご祝儀問題です。**

【解 1】



$y=x$ という回転軸を t 軸とし，$t=k$ で切ったときの D の切り口の線分の長さを r_k とする。

$$V_n=\int_0^{\sqrt{2}} \pi {r_k}^2\,dk \ \cdots ①$$

$t=k$ という直線の xy 平面上における表示は

$$y=-(x-\alpha)+\alpha^n$$

よって，2 直線 $y=-(x-\alpha)+\alpha^n$，$y=x$ の交点の座標については，この 2 式を連立して解くことによって求めることができ，それは

$$\left(\frac{\alpha+\alpha^n}{2},\ \frac{\alpha+\alpha^n}{2}\right)$$

これにより，

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha^n}{2} \\ &= \frac{\alpha+\alpha^n}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

を得る。

これにより，$dk=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+n\alpha^{n-1})\,d\alpha$，

k	0	→	$\sqrt{2}$
α	0	→	1

$\cdots$ ②

一方，r_k は $(\alpha,\ \alpha^n)$ と直線 $y=x$（$x-y=0$）との距離であり，

点と直線の距離公式から $r_k=\dfrac{|\alpha-\alpha^n|}{\sqrt{2}}$ を得るため，

$$\begin{aligned} {r_k}^2 &= \frac{(\alpha-\alpha^n)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha^{n+1}+\alpha^{2n}) \ \cdots ③ \end{aligned}$$

© MathClinic

①，②，③ より

$$V_n=\int_0^1\pi\cdot\frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha^{n+1}+\alpha^{2n})\frac{1}{\sqrt{2}}(1+n\alpha^{n-1})\,d\alpha$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left\{\alpha^2+(n-2)\alpha^{n+1}+(1-2n)\alpha^{2n}+n\alpha^{3n-1}\right\}d\alpha$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{n-2}{n+2}\alpha^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}\alpha^{2n+1}+\frac{1}{3}\alpha^{3n}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}+\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3}-\frac{6n}{(n+2)(2n+1)}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4n^2-8n+4}{3(n+2)(2n+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi\ \cdots 答$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{3\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot1^2}{3\cdot1\cdot2}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\ \cdots 答$$

【戦略 2】

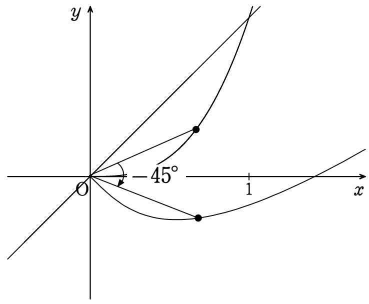
斜めだから考えにくいわけで，斜軸が水平であれば分かりやすくはなります。

そこで，$y=x$ という斜軸を -45° 回転させることを考えます。

現行過程で言えば複素数平面を用いて回転させることになるでしょう。

【解 2】(1) について

$y=x^n$ 上の点 $(u,\ u^n)$ を -45° 回転させることを考える。



i を虚数単位として

$$(u+u^n i)\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}$$
$$=(u+u^n i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{u^n}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{u^n}{\sqrt{2}}-\frac{u}{\sqrt{2}}\right)i$$

ゆえに，曲線 $C:y=x^n$ を -45° 回転させたときの曲線 C' は

$$C':\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+u^n)\\[2mm] y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u^n-u)\end{cases}$$

とパラメータ表示される。

このパラメータ表示された曲線 C' の x 軸回転体を求めればよい。

$$V_n=\int_0^{\sqrt{2}}\pi y^2\,dx$$
$$=\int_0^1\pi\cdot\frac{1}{2}(u^n-u)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+nu^{n-1})\,du$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(u^{2n}-2u^{n+1}+u^2)(1+nu^{n-1})\,du$$

（以降【解 1】の計算と同じ）

【総括】

難関大を目指すにあたり，斜軸回転体の体積については一度はその対応について触れておく必要があるでしょう。

大体練習問題として与えられている斜軸は $y=x$ であることが多いのですが，一般の傾き $y=mx$ $(m>0)$ の場合も本問を例にしてやってみたいと思います。

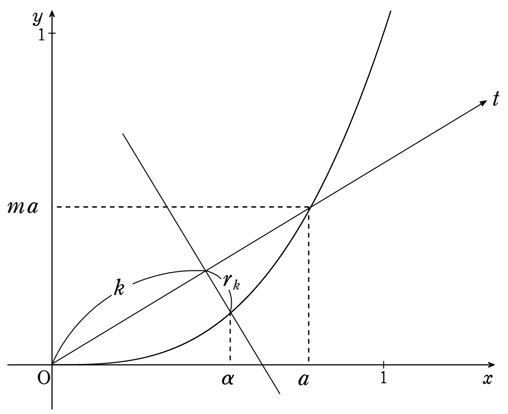
© MathClinic

【確認問題】

m は正の実数，n は 2 以上の整数とする。xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y=mx$ と曲線 $y=x^n$ により，囲まれる部分を D とする。

D を直線 $y=x$ の周りに回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

【確認問題解答】回転軸に対して垂直に切る



$y=mx$ と $y=x^n$ の交点の x 座標を a とすると，この a（>0）は

$$ma=a^n \text{ ，すなわち } m=a^{n-1} \cdots (☆)$$

を満たしている。

$y=mx$ という回転軸を t 軸とし，$t=k$ で切ったときの D の切り口の線分の長さを r_k とする。

$$V_n=\int_0^{\sqrt{m^2+1}\,a} \pi r_k{}^2\,dk \ \cdots \ ①$$

$t=k$ という直線の xy 平面上における表示は

$$y=-\frac{1}{m}(x-\alpha)+\alpha^n$$

よって，2 直線 $y=-\frac{1}{m}(x-\alpha)+\alpha^n$，$y=mx$ の交点の座標については，この 2 式を連立して解くことによって求めることができ，それは

$$\left(\frac{\alpha+m\alpha^n}{m^2+1},\ \frac{m\alpha+m^2\alpha^n}{m^2+1}\right)$$

これにより，

$$k=\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{\alpha+m\alpha^n}{m^2+1}$$
$$=\frac{\alpha+m\alpha^n}{\sqrt{m^2+1}}$$

を得る。

これにより，

$$dk=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}(1+mn\alpha^{n-1})\,d\alpha \ ,$$

k	$0 \ \to \ \sqrt{m^2+1}\,a$
α	$0 \ \to \ a$

$\cdots ②$

一方，r_k は $(\alpha,\ \alpha^n)$ と直線 $y=mx$（$mx-y=0$）との距離であり，点と直線の距離公式から $r_k=\dfrac{|m\alpha-\alpha^n|}{\sqrt{m^2+1}}$ を得るため，

$$r_k{}^2=\frac{(m\alpha-\alpha^n)^2}{m^2+1}$$
$$=\frac{1}{m^2+1}(m^2\alpha^2-2m\alpha^{n+1}+\alpha^{2n}) \ \cdots \ ③$$

①，②，③ から

$$V_n=\int_0^a \pi\ \frac{1}{m^2+1}(m^2\alpha^2-2m\alpha^{n+1}+\alpha^{2n})\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}(1+mn\alpha^{n-1})\,d\alpha$$
$$=\frac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^a\left\{m^2\alpha^2+(nm^3-2m)\,\alpha^{n+1}+(1-2nm^2)\,\alpha^{2n}+nm\alpha^{3n-1}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{m^2}{3}\alpha^3+\frac{nm^3-2m}{n+2}\alpha^{n+2}+\frac{1-2nm^2}{2n+1}\alpha^{2n+1}+\frac{m}{3}\alpha^{3n}\right]_0^a$$
$$=\frac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{m^2}{3}a^3+\frac{nm^3-2m}{n+2}a^{n+2}+\frac{1-2nm^2}{2n-1}a^{2n+1}+\frac{m}{3}a^{3n}\right\}$$

ここで，(☆) より，

$$a^{n+2}=a^n\cdot a^2=(ma)\cdot a^2=ma^3$$
$$a^{2n+1}=(a^n)^2\cdot a^1=(ma)^2\cdot a=m^2a^3$$
$$a^{3n}=(a^n)^3=(ma)^3=m^3a^3$$

$$V_n=\frac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{m^2}{3}a^3+\frac{nm^3-2m}{n+2}ma^3+\frac{1-2nm^2}{2n-1}m^2a^3+\frac{m}{3}m^3a^3\right\}$$
$$=\frac{m^2\pi}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{2(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}a^3$$
$$=\frac{m^2\pi}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{2(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}m^{\frac{3}{n-1}}$$
$$=\frac{m^{\frac{2n+1}{n-1}}\pi}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{2(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}$$

ここの途中計算は根性です。

$m=a^{n-1}$ **より**

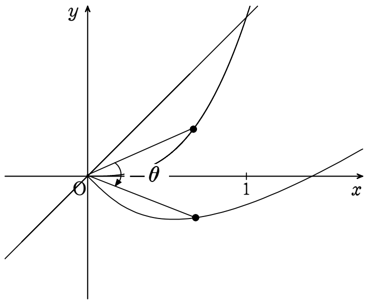
$a=m^{\frac{1}{n-1}}$

© MathClinic

【解 2】斜軸を x 軸に重ねる方針

$m=\tan\theta$ とすると，$y=mx$ が x 軸正の向きとなす角は θ である。

$y=x^n$ 上の点 $(u\,,\,u^n)$ を $-\theta$ 回転させることを考える。



i を虚数単位として

$$\begin{aligned}&(u+u^n i)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\=&(u+u^n i)(\cos\theta-i\sin\theta)\\=&(u\cos\theta+u^n\sin\theta)+(u^n\cos\theta-u\sin\theta)i\end{aligned}$$

ゆえに，$y=x^n$ を $-\theta$ 回転させたときの曲線は

$$\begin{cases}x=u\cos\theta+u^n\sin\theta\\y=u^n\cos\theta-u\sin\theta\end{cases}$$

とパラメータ表示される。

さらに $m=\tan\theta$ に注意すると $\begin{cases}x=\cos\theta\,(u+mu^n)\\y=\cos\theta\,(u^n-mu)\end{cases}$ と表せる。

このパラメータ表示された曲線 C の x 軸回転体を求めればよい。

$$\begin{aligned}V_n&=\int_0^{\sqrt{m^2+1}\,a}\pi Y^2\,dX\\&=\int_0^a\pi\cos^2\theta\,(u^{2n}-2mu^{n+1}+m^2u^2)\cos\theta\,(1+nmu^{n-1})\,dx\\&=\pi\cos^3\theta\int_0^a(u^{2n}-2mu^{n+1}+m^2u^2)(1+nu^{n-1})\,du\end{aligned}$$

$m=\tan\theta$ より，$m^2+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，すなわち $\cos^3\theta=\dfrac{1}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

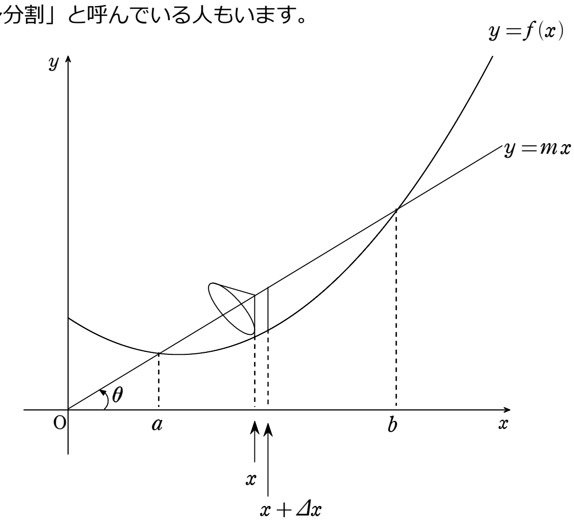
よって，$V_n=\dfrac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_0^a(u^{2n}-2mu^{n+1}+m^2u^2)(1+nu^{n-1})\,du$

（以降【解 1】の計算と同じ）

<cf>

斜軸回転体の体積の話題では「傘型分割」が有名です。

「コーン分割」と呼んでいる人もいます。



x で切り，微小変化量 $\varDelta x$ ずらして切ります。

このとき，斜軸回転してできる図形の体積の変化量 $\varDelta V$ は

$$\varDelta V=(\text{円錐の側面積})\times\varDelta x$$

に近似でき，それを $x=a$ から $x=b$ まで積分することで

$$V=\int_a^b\pi\,(\,mx-f(x)\,)^2\cos\theta\;dx$$

すなわち，

$$\boxed{V=\cos\theta\int_a^b\pi\,(\,mx-f(x)\,)^2\,dx\quad\text{（ただし，}m=\tan\theta\text{ である）}}$$

という結果を得ます。

結果は分かりやすく頭に入りやすいものです。

しかし，記述式の試験においてはあくまで検算用のものであり，実際には【解 1】，【解 2】のいずれかで記述しましょう。

© MathClinic