$xy$ 平面の放物線 $y=x^2$ 上の３点 P，Q，R が次の条件を満たしている。
　△PQR は一辺の長さが $a$ の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。
このとき，$a$ の値を求めよ。

＜ '04 東京大 ＞

**【戦略 1】**

$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$（$p<q$）**とおき，与えられた条件を手なりに翻訳すると，**

$$p+q=\sqrt{2}$$

**であることは容易に分かります。**

**そうなると，**

$$\begin{aligned} a^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\\ &=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2\\ &=(p-q)^2+(p+q)^2(p-q)^2\\ &=3(p-q)^2 \end{aligned}$$

**より，$a^2$ は $p$，$q$ の対称式であることから，$pq$ の情報が分かれば解決であることになります。**

**まだ翻訳していないR の座標を求めにいって，それが $y=x^2$ 上にあるという翻訳を通じて，この情報を Get しにいくのだろうという見通しを立てたいところです。**

**R の座標を Get するにあたっては △PQR が正三角形であることを翻訳することになります。**

**３辺が等しいとはしたくありませんから，ベクトルを繋いでいくことで，R の座標を求めにいく方針を考えます。**

**その際の処理の基本は ”長さと方向の用意” という言葉が指針になります。（どういうことかは 【解答】 を見て納得してください。）**

【解 1】

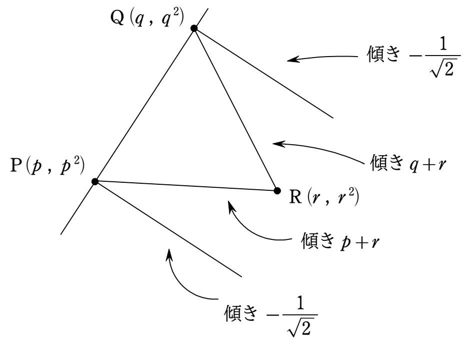
$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$（$p<q$）として一般性を失わない

今，直線 PQ の下方に点 $\mathrm{R}(r,\ r^2)$ があると仮定する。

一般に $y=x^2$ 上の２点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha \neq \beta)$ を結ぶ線分の傾きは

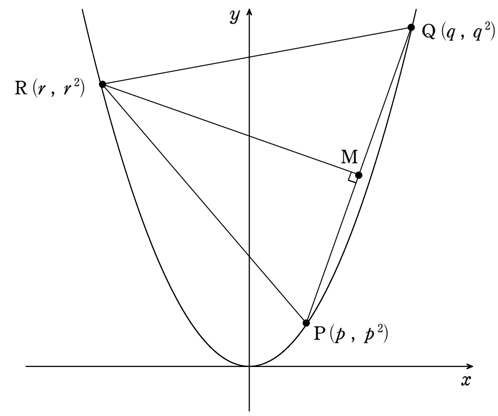
$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta$$

であることに注意する。




すると，$q+r<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<p+r$，つまり $q<p$ となり，矛盾する。

よって，点 R は直線 PQ の上方にある。




さて，条件から $p+q=\sqrt{2}$ …①

線分 PQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

$$\begin{aligned} p^2+q^2&=(p+q)^2-2pq\\ &=2-2pq \text{（∵ ①）} \end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1-pq\right)$

方向を準備

$\overrightarrow{\mathrm{MR}} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MR}} \parallel \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}$ は $\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

長さを準備

$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\vec{e}=\dfrac{a}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 1-pq\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}\\ \dfrac{a}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}\,(1-a)}{2}\\ 1-pq+\dfrac{a}{2}\end{pmatrix}$$

よって，R の座標は $\mathrm{R}\left(\dfrac{1-a}{\sqrt{2}},\ 1-pq+\dfrac{a}{2}\right)$ であり，これが放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$1-pq+\frac{a}{2}=\frac{(1-a)^2}{2}$$

これより，$pq=\dfrac{-a^2+3a+1}{2}$ …②

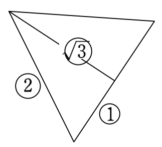
$$\begin{aligned}a^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2\\&=(p-q)^2+(p+q)^2(p-q)^2\\&=3(p-q)^2\quad(\because ①)\\&=3\{(p+q)^2-4pq\}\\&=3\{2-2(-a^2+3a+1)\}\quad(\because ①,②)\\&=6a^2-18a\end{aligned}$$

よって，$5a^2-18a=0$，すなわち $a(5a-18)=0$ を得る。

$a>0$ より，$a=\dfrac{18}{5}$ …答

**【戦略 2】**

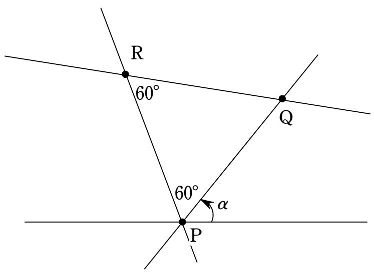
**正三角形であることを【解 1】ではいわば**




**と翻訳しています。**

**ここでは，角度主体で**

**右図のように翻訳してみます。**




**回転を扱おうと思うと，複素数平面も手段の 1 つですが，せっかく PQ の傾きについての情報があるのですから，tan を利用した方針を考えたいですね。**

【解 2】～ R が直線 PQ の上方にあることを述べてから ～

$\tan\alpha=\sqrt{2}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と設定すると，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha\pm60^\circ)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan60^\circ}{1\mp\tan\alpha\tan60^\circ}\\&=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{1\mp\sqrt{6}}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+60^\circ)&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\\&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{6})}{-5}\\&=-\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-60^\circ)&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}\\&=\frac{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}\\&=\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

直線 PQ，QR，RP の傾きはそれぞれ $p+q$，$q+r$，$r+p$

一方で

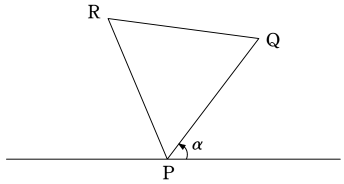
直線 PQ，QR，RP の傾きはそれぞれ $\sqrt{2}$，$\tan(\alpha-60^\circ)$，$\tan(\alpha+60^\circ)$

$$\begin{cases}p+q=\sqrt{2}\ \cdots ①\\ q+r=\dfrac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5}\ \cdots ②\\ r+p=-\dfrac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}\ \cdots ③\end{cases}$$

②−③ より $q-p=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$ であり，
$$\begin{aligned}a^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2\\&=(p-q)^2+(p+q)^2(p-q)^2\\&=3(p-q)^2\quad(\because ①)\\&=\frac{18^2}{5^2}\end{aligned}$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{18}{5}$ …答

【解 3】～ R が直線 PQ の上方にあることを述べてから ～




$\tan\alpha=\sqrt{2}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と設定する。

直線 PR の傾きは

$$\tan(\alpha+60^\circ)=\frac{\tan\alpha+\tan 60^\circ}{1-\tan\alpha\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\ (=m\ とおく)$$

直線 PR の方程式は $y=m(x-p)+p^2$

これと $y=x^2$ を連立して $x^2=m(x-p)+p^2$，すなわち

$$x^2-mx+mp-p^2=0$$

これは $(x-p)\{x-(m-p)\}=0$ と因数分解できる。

$x=p$ は点 P の $x$ 座標を与えるので，$\mathrm{R}(m-p,\ (m-p)^2)$

また，$\mathrm{R}(r,\ r^2)$ とおくと，$r=m-p$ …(ア)

$\beta=60^\circ+\alpha$ とおくと，直線 RQ の傾きは

$$\tan(\beta+60^\circ)=\frac{\tan\beta+\tan 60^\circ}{1-\tan\beta\tan 60^\circ}=\frac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}\ (=m'\ とおく)$$

これより，直線 RQ の方程式は $y=m'(x-r)+r^2$

これと $y=x^2$ を連立して $x^2=m'(x-r)+r^2$

これを整理すると $(x-r)\{x-(m'-r)\}=0$

$x=r$ は R の $x$ 座標を与えるので，$\mathrm{Q}(m'-r,\ (m'-r)^2)$

$m'-r=q$ より，$m'-(m-p)=q$ （∵ (ア)）

これより $p-q=m-m'$ …(イ)

$$m=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\ より，m'=\frac{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}$$

$$m'-m=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}=-\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

$$\begin{aligned}a^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2\\&=(p-q)^2+(p+q)^2(p-q)^2\\&=3(p-q)^2\quad (\because p+q=\mathrm{PQ}\ の傾き=\sqrt{2})\\&=3(m-m')^2\quad (\because (イ))\\&=3\times\frac{108}{25}\\&=\frac{18^2}{5^2}\end{aligned}$$

$a>0$ より $a=\dfrac{18}{5}$ …答

【総括】

見た目では逃げなければいけない問題にも見えず，深入りして時間だけを失いかねない厄介な問題です。

$p+q=\sqrt{2}$ ということは分かりますから，$pq$ さえ求まれば，あるいは $p-q$ さえ求まれば … などと " できそうな気持ち " を掻き立ててくる問題でした。

結局は正三角形であることをどうやって扱うのかが勝負の決め手になったことでしょう。

比率主体で，【解 1】 の方針か，角度主体で【解 2】,【解 3】 の方針かと大きく分けて 2 つの方針があったことと思います。

角度主体の方針をとろうと思った場合，目につく回転の手段ですが，複素数平面ではなく tan で処理しました。

経験上，回転に関して複数の方針が考えられる場合，tan だとうまくいくということが多いです。

ベクトルの内積経由で角度を扱うにせよ，複素数平面で回すにせよ，この２つは「線分の回転」であり，長さの情報まで含めた処理なのに対して，tan による方針は「直線のなす角」という長さの情報を含んでいないことが原因の 1 つかと思います。

いずれにせよ， 最初に舞い降りた方針で処理し始めたとしても，「えっ，こんな計算重いの？」「何か他に上手い方法があるのか？」などと自分の解法に自信が持てなくなってしまうような問題でした。

「この方針で処理しきる」という強い覚悟をもってやりきることも大切ですね。